ANNALES

DE

RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T.S.F.

79, Boulevard Haussmann, 79

PARIS

REVUE TRIMESTRIELLE

TOME VIII. JANVIER 1953. N° 31.

TOME VIII JANVIER 1953 N° 31

ANNALES DE RADIOÉLECTRICITÉ

GROUPE DE LA COMPAGNIE GÉNÉRALE DE T. S. F.

COMPAGNIE GÉNÉRALE DE TÉLÉGRAPHIE SANS FIL (CSF)
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE (SFR)
RADIO-FRANCE (RF)
RADIO-ORIENT (RO)
COMPAGNIE RADIO-MARITIME (CRM)
COMPAGNIE RADIO-CINÉMA (CRC)
ÉTABLISSEMENTS E. ROBERT ET C[ie] (LA STÉATITE INDUSTRIELLE) (SI)
SOCIÉTÉ DE TRAITEMENTS ÉLECTROLYTIQUES ET ÉLECTROTHERMIQUES (STEL)
SOCIÉTÉ FRANÇAISE RADIOÉLECTRIQUE-AFRIQUE (SFRA)
SOCIÉTÉ ANONYME LE CONDENSATEUR CÉRAMIQUE (LCC)
COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES MÉTAUX ÉLECTRONIQUES (CIME)
COMPAGNIE INDUSTRIELLE DES CÉRAMIQUES ÉLECTRONIQUES (CICE)

79, Boulevard Haussmann, PARIS

SOMMAIRE

Rédacteur scientifique : M. Robert WARNECKE

Prière d'adresser toute correspondance à la Compagnie Générale de T. S. F., Centre d'Information et de Documentation, 10, rue Carducci, Paris (19e).

LES FILTRES PASSE-BANDE EN HYPERFRÉQUENCE

PAR J. C. SIMON ET G. BROUSSAUD,

Département Recherches générales,
Centre de Recherches techniques, Compagnie générale de T. S. F.

SOMMAIRE. — *Le problème des filtres en hyperfréquence est abordé par une méthode de calcul directe et simple. Elle permet de voir s'il est possible d'assimiler des éléments en hyperfréquence aux éléments de circuit basse-fréquence, d'exprimer l'influence des pertes et de l'inégalité des obstacles pour une cavité résonnante, enfin de calculer les caractéristiques d'un filtre à trois cavités.*

Un nouveau type d'obstacle a été développé. Il permet d'atteindre de meilleures performances qu'avec les obstacles habituellement décrits et de simplifier la fabrication et le réglage des filtres. Des abaques sont donnés pour ces obstacles.

Enfin sont présentés des exemples de réalisation de filtres passe-bande de grande qualité sur guide et sur coaxial. (C. D. U. 621.396.662.3.029.6.)

SUMMARY. — *The problem of microwave filters is approached by a direct and simple method of calculation. It shows whether it is possible to assimilate microwave elements to low frequency ones, it expresses the influence of losses and inequality of obstacles for a resonant cavity, and allows the characteristics of a three-cavity filter to be calculated.*

A new type of obstacles has been developed the performances of which are better than for obstacles described. Construction and adjustment are simplified-charts for these obstacles are given.

Very good experimental results are obtained for pass-band filters on wave-guides and coaxials. (U. D. C. 621.396.662.3.029.6.)

INTRODUCTION.

La technique des filtres basse fréquence a atteint depuis longtemps un haut degré de perfection. Il semblait donc naturel aux premiers constructeurs de filtres en hyperfréquence de chercher à tirer parti de cette somme de connaissances.

De nombreux efforts ont donc été faits pour ramener les filtres U. H. F. aux filtres classiques Mais il ne semble pas que ces efforts se soient montrés aussi fructueux qu'on aurait pu le penser au premier abord.

Ceci se comprend facilement. Les filtres B. F. sont un assemblage d'éléments localisés de faibles dimensions par rapport à la longueur d'onde, résistance, inductance, capacitance, et en général exempts de lignes de transmission de longueur comparable à la longueur d'onde. Mais les ondes en hyperfréquences sont caractérisées par des longueurs d'onde à notre échelle. Il n'est plus possible d'utiliser des éléments dont les dimensions sont faibles par rapport à la longueur d'onde. Les différents éléments d'un filtre ne peuvent en général être assimilés à des éléments localisés, ils sont reliés par des lignes dont la longueur est nécessitée par le fait d'atténuer les modes supérieurs et de n'avoir interaction que par un seul type d'onde. Il *n'est plus possible, en particulier, de choisir des circuits à déphasage minimum.* En fait, les problèmes sont différents et l'assimilation des éléments U. H. F. à des inductances, résistances, capacitances, si elle permet parfois des analogies intéressantes, n'amène pas de réels progrès mais plutôt beaucoup de complications inutiles. Il nous semble préférable d'aborder ces problèmes directement sans passer par l'intermédiaire des filtres B. F.

Au cours de notre étude, nous examinerons en détail les différents paramètres de construction d'un filtre passe-bande sur guide. Nous verrons que dans ce domaine, la technique des filtres U. H. F. a atteint une qualité analogue à celle des filtres B. F.

L'élément auquel se réduit le filtre U. H. F. est l'obstacle mince, c'est-à-dire un obstacle entièrement contenu dans un plan de section droite du guide. Ces obstacles minces associés deux à deux permettent de constituer des cavités de surtension déterminée. Les seuls paramètres à notre disposition sont, en définitive, les surtensions et les couplages successifs de ces cavités le long du guide.

Pour l'exposition des calculs, nous avons choisi, plutôt que les notions d'impédance d'entrée et de transfert, celles de coefficients de réflexion et de transmission qui s'introduisent plus naturellement sur les lignes de transmission.

Rappelons la définition de ces coefficients. Un obstacle est caractérisé sur une ligne de transmission terminée par une impédance caractéristique par des coefficients de transmission t et de réflexion r. Le coefficient de transmission est le rapport, en amplitude et en phase, du champ de l'onde transmise au champ de l'onde incidente. Ces ondes, se propageant dans le même sens, conservent la même différence de phase quel que soit le point de la ligne considéré. Le coefficient de réflexion est le rapport du champ de l'onde réfléchie et du champ de l'onde incidente. La dernière remarque relative aux phases n'étant plus valable, il est nécessaire de préciser une origine, à partir de laquelle on compte l'onde incidente et l'onde réfléchie.

Il est possible de démontrer (*cf.* [1]) à l'aide de principes très généraux, que ces coefficients relatifs à un obstacle sans perte peuvent se mettre sous la forme

$$(1)\qquad \begin{cases} t = i \sin u\, e^{i\varphi}, \\ r = \cos u\, e^{i\varphi}, \end{cases}$$

l'origine des ondes étant prise dans un plan de symétrie électromagnétique qu'il est toujours possible de définir pour un tel obstacle.

Dans le cas où il existe un plan de symétrie géométrique, ce dernier coïncide avec le plan de symétrie électromagnétique.

Il est facile de relier φ et u aux valeurs des impédances d'entrée et de transfert de l'obstacle considéré comme un quadripôle.

Dans le cas où l'obstacle est mince, un seul paramètre suffit à le représenter. On a alors

$$\varphi = \pi + u$$

et

$$(2)\qquad \begin{cases} t = -i \sin u\, e^{iu}, \\ r = -\cos u\, e^{iu}. \end{cases}$$

L'obstacle est équivalent à une impédance en dérivation sur la ligne :

si $u > 0$, l'obstacle est équivalent à une capacitance;

si $u < 0$, l'obstacle est équivalent à une inductance.

Z étant l'impédance normalisée équivalente, on a entre Z et u la relation

$$Z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{tg}\, u.$$

Mais, il faut prendre garde d'assimiler complètement un obstacle sur guide à une impédance localisée en ce point. Nous verrons plus loin que la variation de tg u en fonction de la fréquence n'est pas proportionnelle (ou inversement proportionnelle) à cette dernière, comme on aurait pu s'y attendre.

Nous avons là un exemple du danger de l'assimilation inconsidérée de circuits U. H. F. et B. F.

Étudions maintenant en détail l'élément constitutif de nos filtres sur guide, la cavité formée simplement de deux obstacles minces égaux placés à distance convenable.

I. — ÉTUDE D'UNE CAVITÉ RÉSONNANTE SUR UN GUIDE D'ONDE.

On pourrait penser intercaler un élément résonnant sur la ligne constituée par un guide d'onde, en disposant un obstacle résonnant mince tel que ceux qui sont décrits dans la littérature (par exemple [2], p. 661). Mais ces derniers ne satisfont pas, à cause des tolérances de fabrication, aux conditions sévères qu'on exige des éléments résonnants.

En fait, la manière la plus simple, utilisée depuis longtemps, consiste à disposer deux obstacles minces égaux à des distances convenables.

1. Calcul des coefficients de transmission et de réflexion d'une cavité.

Soient (*fig.* 1) deux obstacles 1 et 2 sur une ligne, dont les coefficients de transmission et de réflexion sont respectivement t_1, r_1; t_2, r_2.

Soient, rapportés au plan de symétrie de l'obstacle 1 : a_0 l'onde incidente, a_1 l'onde transmise, b_1 l'onde réfléchie par l'obstacle 1.

Soient, rapportés au plan de l'obstacle 2 : a_2 l'onde transmise, b_2 l'onde réfléchie par l'obstacle 2.

Il n'y a pas d'onde se propageant de 2 vers 1 au delà de 2, la ligne étant terminée sur son impédance caractéristique.

Soit θ, la distance électrique séparant les obstacles 1 et 2. L'onde incidente sur 2 est donc qa_1, l'onde incidente sur 1 se propageant de 2 vers 1 est qb_2; avec $q = e^{-i\theta}$ (1).

Écrivons l'égalité des champs de part et d'autre des obstacles, nous obtenons quatre équations

$$(3)\quad \begin{cases} a_1 = t_1 a_0 + q r_1 b_2, \\ a_2 = q t_2 a_1, \\ b_1 = r_1 a_0 + q t_1 b_2, \\ b_2 = r_2 q a_1. \end{cases}$$

En rapportant T et R au plan de 1, on a

$$R = \frac{b_1}{a_0} \quad \text{et} \quad T = \frac{a_2}{q a_0}.$$

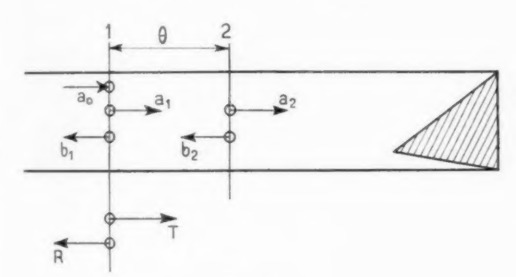


Fig. 1.

On obtient facilement T et R, à partir du système (3)

$$(4)\quad T = \frac{t_1 t_2}{1 - q^2 r_1 r_2},$$

$$(5)\quad R = r_1 + \frac{q^2 t_1^2 r_2}{1 - q^2 r_1 r_2}.$$

2. Cas de deux obstacles identiques et de pertes négligeables.

Supposons $t_1 = t_2 = t$ et $r_1 = r_2 = r$, t et r étant donnés par les formules (2). Supposons également les pertes négligeables.

(1) Remarque importante : Le facteur de phase d'une onde peut s'écrire sous les deux formes équivalentes $e^{i(\omega t - k_z z)}$, $e^{i(k_z z - \omega t)}$.

Dans ce texte, nous avons choisi la première notation. En conséquence, la phase d'une onde se propageant le long d'une ligne tourne dans le sens négatif.

On peut écrire

$$(6)\quad |T|^2 = \frac{\sin^4 u}{1 + \cos^4 u - 2\cos^2 u \cos 2x},$$

avec

$$x = \theta - \varphi = \theta - \pi - u.$$

En vertu de la conservation de l'énergie, on a évidemment

$$|R|^2 = 1 - |T|^2.$$

Dans le cas général, u aussi bien que θ dépend de la fréquence. Il est possible de démontrer (*voir* annexe I) que pour un obstacle mince, la formule

$$(7)\quad \lambda_g \operatorname{tg} u = \text{const.}$$

est assez bien vérifiée dans une large bande. On peut aussi écrire

$$(8)\quad \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} u_0 \frac{\lambda_{g_0}}{\lambda_g},$$

avec

λ_g, longueur d'onde dans le guide;
u_0, valeur de u correspondant à λ_{g_0}.

Si nous introduisons dans la formule (6) la valeur de u tirée de la formule (8), *nous voyons s'introduire naturellement le paramètre*

$$\alpha = \frac{\lambda_g}{\lambda_{g_0}}.$$

Ce paramètre joue, dans la cavité sur guide, un rôle analogue au paramètre $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{f_0}{f}$ dans les circuits oscillants.

Les obstacles constituant la cavité étant situés à une distance comprise entre $\left(n\frac{\lambda_g}{2} + \frac{\lambda_g}{4}\right)$ et $\left(n\frac{\lambda_g}{2} - \frac{\lambda_g}{4}\right)$, on trouve en supposant seulement u négligeable devant π :

$$(9)\quad |T|^2 = \frac{1}{1 + \frac{4\alpha^2}{\operatorname{tg}^4 u_0}(\alpha^2 + \operatorname{tg}^2 u_0)\sin^2\frac{n\pi}{\alpha}}.$$

Dans le cas d'un circuit résonnant, nous aurions

$$(9')\quad |T|^2 = \frac{1}{1 + S_0^2\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2}.$$

Ces deux formules sont équivalentes pour α voisin de 1. En effet, posant $\alpha = 1 + \varepsilon$, les formules précédentes s'écrivent :

— cavité résonnante :

$$(10)\quad |T|^2 = \frac{1}{1 + \frac{4}{\operatorname{tg}^4 u_0}(1 + \operatorname{tg}^2 u_0)^2 n^2 \pi^2 \varepsilon^2};$$

— circuit résonnant :

$$(10')\quad |T|^2 = \frac{1}{1 + 4 S_0^2 \varepsilon^2}.$$

Nous pouvons définir ainsi pour la cavité résonnante une *surtension qui est celle du circuit résonnant dont la courbe de transmission est osculatrice en son sommet à la courbe de transmission de la cavité*

$$S_0 = n\pi \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 u_0}}{\mathrm{tg}^2 u_0} = n\pi \frac{\cos u_0}{\sin^2 u_0}. \tag{11}$$

L'intervalle choisi ($0,9 < \alpha < 1,1$) est suffisant pour représenter la transmission du système bien en dehors de la bande à demi-puissance, même dans le cas de faibles surtensions.

La dissymétrie des courbes $f(\alpha)$ met en évidence la dissymétrie de la transmission des systèmes résonnants. Remarquons aussi que cette dissymétrie se produit dans des sens opposés selon qu'il s'agit du circuit ou de la cavité.

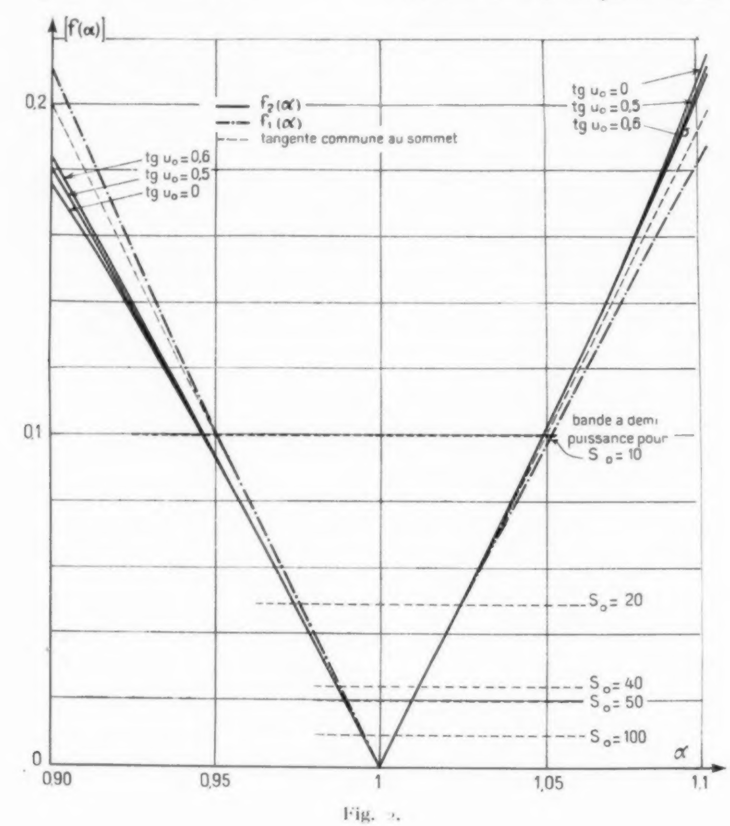


Fig. 2.

Et la formule (9) devient

$$|T|^2 = \frac{1}{1 + S_0^2 \dfrac{4\alpha^2}{n^2\pi^2} \dfrac{\alpha^2 + \mathrm{tg}^2 u_0}{1 + \mathrm{tg}^2 u_0} \sin^2 \dfrac{n\pi}{\alpha}}, \tag{12}$$

les fonctions

$$|f_1(\alpha)| = \left|\alpha - \frac{1}{\alpha}\right| \quad \text{(circuit résonnant)}; \tag{13}$$

$$|f_2(\alpha)| = \left|\frac{2\alpha}{\pi}\left(\frac{\alpha^2 + \mathrm{tg}^2 u_0}{1 + \mathrm{tg}^2 u_0}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\pi}{\alpha}\right| \tag{13'}$$

(cavité résonnante)

sont tracées sur la figure 2 et permettent une intéressante comparaison entre le circuit résonnant classique et la cavité résonnante avec $n = 1$ que nous venons de définir comme ayant la même surtension.

Les courbes $f_2(\alpha)$ forment une famille dépendant du paramètre u_0. En fait, dans les conditions usuelles, ce paramètre n'agit que peu et les courbes restent groupées dans un étroit faisceau dans tout l'intervalle considéré.

On voit que les courbes $f_1(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$ diffèrent d'autant plus qu'on se trouve plus loin de la résonance.

Ceci revient à dire que les courbes de transmission $T_1(\alpha)$ et $T_2(\alpha)$ différent d'autant plus que la surtension est plus petite et qu'on se trouve plus loin de la résonance.

Pratiquement, on peut admettre qu'il y a iden-

tité jusqu'aux points à demi-puissance et pour les surtensions supérieures à 20 ou 30.

Mais, il ne faut pas oublier que α représente le rapport $\frac{\lambda_g}{\lambda_{g_0}}$, qui ne coïncide pas dans le cas des cavités sur guide avec le rapport $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{f_0}{f}$. Rappelons, par exemple que, dans un guide rectangulaire, on a

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4a^2} \tag{14}$$

(a mesure du grand côté du guide).

L'analogie établie entre la cavité résonnante et le circuit résonnant n'est donc valable que par rapport aux longueurs d'onde dans les systèmes considérés. *Si nous voulons exprimer les mêmes phénomènes en fonction de la fréquence, il faut nous attendre à trouver des différences beaucoup plus marquées.*

La surtension de la cavité résonnante a été définie au sommet de la courbe de transmission, où l'on peut écrire

$$f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 2(\alpha - 1) = 2\left(\frac{\lambda_g}{\lambda_{g_0}} - 1\right) = 2\,\frac{\Delta\lambda_g}{\lambda_{g_0}}. \tag{15}$$

Supposant $\Delta\lambda_g$ suffisamment petit, on peut déduire par différentiation de la formule (14) une relation entre $\frac{\Delta\lambda_g}{\lambda_g}$ et $\frac{\Delta f}{f}$.

On trouve

$$\frac{d\lambda_g}{\lambda_g} = \frac{d\lambda}{\lambda}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)^2 = -\frac{df}{f}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)^2 \tag{16}$$

la formule de la surtension en prenant maintenant pour α la valeur $\alpha = \frac{f_0}{f} = \frac{\lambda}{\lambda_0}$ s'écrit

$$S = S_0\left(\frac{\lambda_{g_0}}{\lambda_0}\right)^2, \tag{17}$$

$$S = n\pi\,\frac{\cos u}{\sin^2 u}\left(\frac{\lambda_{g_0}}{\lambda_0}\right)^2. \tag{18}$$

Remarques. — Nous avons défini, pour une même cavité, deux surtensions selon qu'on considère sa transmission en fonction de la longueur d'onde dans le guide ou en fonction de la fréquence.

La surtension calculée à partir de la formule (18) *représente celle du circuit résonnant dont la courbe de transmission en fonction de la fréquence est osculatrice à celle de la cavité. Et il faut se garder de confondre cette définition avec celle généralement utilisée en pratique, liée à la bande passante à demi-puissance.*

Nous avons vu (*fig.* 2) que les deux définitions coïncidaient à peu près pour des surtensions « en longueur d'onde » supérieures à 30, ce qui correspond à peu près à des surtensions « en fréquences » de l'ordre de 70 dans les conditions usuelles (guide λ_6, $f = 3\,600$ Mc/s).

Remarquons qu'une nouvelle cause d'erreur s'introduit dans le calcul (16) en assimilant les variations de λ à des éléments différentiels infiniment petits.

Comme il peut être utile de définir une cavité résonnante par sa bande passante à demi-puissance (ou à toute autre fraction) il est donc nécessaire, dans le cas de surtensions moyennes et faibles ainsi définies de faire le calcul direct à partir des formules (11), (12) et de la figure 2.

3. Plans de référence de la cavité résonnante.

Rapportée au plan du premier obstacle la transmission de la cavité s'écrit, en amplitude et phase

$$T = \frac{\sin^2 u}{\sqrt{1 + \cos^4 u - 2\cos^2 u \cos 2x}}\, e^{i(2u - \psi + \pi)}, \tag{19}$$

avec

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\cos^2 u \sin 2x}{1 - \cos^2 u \cos 2x}.$$

A l'accord ($x = 0$), on a

$$T = e^{i(2u+\pi)}.$$

On obtiendra donc une transmission unité (en amplitude et phase) en reportant le plan de référence de la cavité (plan P). de l'angle $\pi + 2u$ en avant du plan du premier obstacle, c'est-à-dire de u en avant du plan du second

Les caractéristiques de la cavité devant être symétriques par rapport au plan médian, on en déduit que le système est équivalent à un élément résonnant mince situé au milieu d'une ligne de longueur électrique $\pi + 3u$ (*fig.* 3).

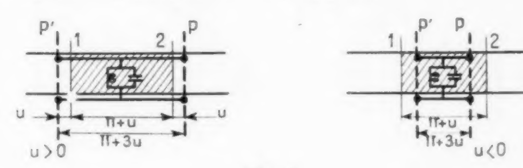


Fig. 3.

Au voisinage de l'accord, les coefficients de transmission et de réflexion de l'élément résonnant s'écrivent

$$\begin{cases} T = \cos\psi\, e^{i\psi}, \\ R = i\sin\psi\, e^{i\psi}, \qquad \text{avec} \quad \operatorname{tg}\psi = 4S\,\dfrac{\Delta f}{f_0}. \end{cases} \tag{20}$$

Ces relations peuvent aussi représenter le comportement de la cavité à condition de supposer nulle la distance électrique des plans P et P'.

Ces plans sont les plans de référence de la cavité.

Examinons maintenant l'influence des pertes et de l'inégalité des obstacles. Pour cela, nous pouvons négliger les variations de u dans la bande et adopter pour T et R des expressions dans lesquelles u est très petit et indépendant de la fréquence.

4. Influence des pertes.

Supposons que le guide atténue une onde se propageant, le facteur de phase q s'écrit alors

$$q = e^{-i\theta} e^{-2\gamma l},$$

posons

$$e^{-2\gamma l} = 1 - v^2 \qquad (v \text{ petit}).$$

Supposons que les obstacles aient également des pertes, la relation de conservation de l'énergie ne s'écrit plus alors

$$|t|^2 + |r|^2 = 1,$$

mais plutôt

$$|t|^2 + |r|^2 = 1 - v'^2$$

et $|t|^2$ et $|r|^2$:

$$(21) \qquad \begin{cases} |t|^2 = (1 - v'^2)\sin^2 u, \\ |r|^2 = (1 - v'^2)\cos^2 u. \end{cases}$$

Supposons enfin, que la surtension soit élevée, c'est-à-dire que *u soit petit*. C'est là évidemment le cas où en général les pertes sont sensibles.

En utilisant des développements limités $|T|^2$ et $|R|^2$ s'écrivent

$$(22) \qquad |T|^2 \simeq \frac{u^4}{(u^2 + v^2 + v'^2)^2 + 4x^2},$$

$$(23) \qquad |R|^2 \simeq \frac{(v^2 + v'^2)^2 + 4x^2}{(u^2 + v^2 + v'^2)^2 + 4x^2},$$

la surtension est alors donnée par S' :

$$(24) \qquad S' = \frac{S}{1 + \dfrac{v^2 + v'^2}{u^2}}.$$

Sur ces formules, nous voyons que l'existence de pertes amène évidemment une diminution de l'onde transmise, diminue la surtension et augmente les ondes stationnaires à la résonance [2].

[2] Un calcul complet montre que les pertes influent très peu sur la fréquence de résonance, l'accord de la cavité se produisant pour

$$x \simeq -u^2 \frac{\gamma\lambda}{4\pi}.$$

Ce terme de l'ordre de 10^{-4} ou 10^{-5} est toujours négligeable.

En effet, à la résonance, les pertes sont données par

$$(25) \qquad p^2 = 1 - |T|^2_{x=0} \simeq 2\frac{v^2 + v'^2}{u^2},$$

le taux d'ondes stationnaires (en champ)

$$(26) \qquad \tau_{\min} = \frac{1 + |R|}{1 - |R|} \simeq 1 + 2\frac{v^2 + v'^2}{u^2} \simeq 1 + p^2$$

et la surtension

$$(27) \qquad S' = \frac{S}{1 + \dfrac{p^2}{2}},$$

Donc :

— *les pertes se répartissent également entre les obstacles et le guide lui-même*;

— *le taux d'ondes stationnaires minimum est lié simplement à ces pertes.*

Enfin, la surtension est évidemment diminuée par les pertes. Le matériau dont est constitué le guide et les obstacles étant fixé, c'est-à-dire v^2 et v'^2 étant donnés, supposons que pour augmenter la surtension S nous diminuions u. L'obstacle pris seul devient plus réfléchissant : la formule (25) nous dit que les pertes vont augmenter, donc d'après (26) le taux d'ondes stationnaires.

A la limite u tendant vers zéro et devenant petit par rapport à v et v', le taux d'ondes stationnaires devient très grand même à la résonance et la surtension atteint la valeur limite

$$(28) \qquad S_{\max} = \frac{n\pi}{v^2 + v'^2}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)^2.$$

Prenons un exemple pratique :

On a réalisé, sur un guide λ_6, une cavité de surtension $S = 100$ accordée sur 3 605 Mc/s.

Le taux résiduel à l'accord est de 1,02.

La mesure directe des pertes dans cette cavité a donné $p^2 = 0{,}02$, résultat en parfait accord avec le taux d'ondes stationnaires observé [formule (26)].

De la surtension, on déduit

$$u^2 = \frac{\pi}{S}\left(\frac{\lambda_g}{\lambda}\right)^2 = 0{,}071,$$

d'où les paramètres v et v' :

$$v^2 + v'^2 = \frac{u^2 p^2}{2} = 0{,}71 \cdot 10^{-3},$$

l'atténuation dans le guide étant de 0,13 db/m, on a

$$v^2 = 0{,}36 \cdot 10^{-3}, \qquad \text{d'où} \qquad v'^2 = 0{,}35 \cdot 10^{-3}.$$

On voit que les pertes dans le guide et dans les obstacles sont sensiblement du même ordre.

De la formule (28), on tire enfin

$$S_{max} = \frac{\pi}{0,7.10^{-3}} \left(\frac{12,5}{8,32}\right)^2 = 10\,000.$$

5. Influence de l'inégalité des obstacles.

Jusqu'ici, nous avons supposé les deux obstacles identiques. Supposons-les maintenant légèrement différents. Prenons u petit, c'est le cas où cette influence est la plus grande et pour simplifier, supposons les pertes nulles.

Soient u et $u + \varepsilon$, φ et $\varphi + \varepsilon$ (*cf.* [1]), les paramètres des deux obstacles ($\varepsilon \ll u$). On a alors

$$(29) \qquad |T|^2 = \frac{u^4 - \frac{u^2 \varepsilon^2}{2}}{u^4 + 4x^2},$$

$$(30) \qquad |R|^2 = \frac{4x^2 + u^2 \varepsilon^2}{u^4 + 4x^2}.$$

L'effet de ε est analogue à celui du paramètre de perte v'. L'énergie transmise est diminuée à l'accord

$$(31) \qquad |T|^2_{x=0} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2u^2}.$$

Le taux d'ondes stationnaires minimum est

$$(32) \qquad \tau_{min} = 1 + \frac{2\varepsilon}{u}.$$

Supposons que nous voulions à la résonance $\tau < 1,02$, il faut $\frac{\varepsilon}{u} < \frac{1}{100}$, ce qui exige pour une cavité de surtension 100 dans un guide ordinaire à 8 cm dont les obstacles sont des fenêtres (*fig.* 6 *b*) une précision dans la dimension des fentes de 1/10e de millimètre, difficile à réaliser.

II. — ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DES OBSTACLES.

Elle se ramène à la mesure des paramètres u et φ.

1. Mesure directe (*fig.* 4).

La mesure n'est simple qu'en apparence. On a

$$(33) \qquad \cos u = |r| = \frac{\tau_1 - 1}{\tau_1 + 1}$$

et

$$(34) \qquad 2\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_g}$$

(a est la distance de l'obstacle au premier maximum d'ondes stationnaires).

Mais les cavités de surtensions supérieures à 40 nécessitent des obstacles dont le u est inférieur à 0,2 rad, correspondant à des taux supérieurs à 25.

De tels taux sont trop élevés pour que leur mesure directe fournisse autre chose qu'un ordre de grandeur. Dans les mêmes conditions φ est trop voisin de π pour pouvoir être déduit de la mesure de a avec la précision requise. En fait, cette méthode ne permet de mesurer que les caractéristiques d'obstacles à u trop grands pour être utilisés dans la réalisation d'éléments de filtres.

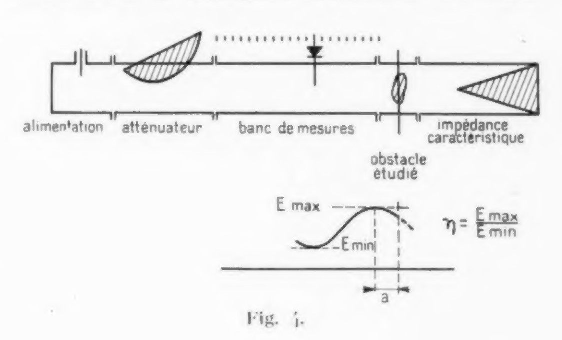


Fig. 4.

2. Calcul de φ et u à partir des caractéristiques d'une cavité résonnante.

On réalise une cavité définie par deux obstacles aussi identiques que possible. Toutes les précautions doivent être prises pour diminuer les pertes à l'intérieur de cette cavité. Dans le cas de fortes surtensions, il peut être nécessaire d'argenter les parois intérieures du guide d'onde.

De la mesure de la fréquence d'accord f_0 de la cavité, on déduit

$$(35) \qquad \varphi = \frac{2\pi l}{\lambda_{g_0}}$$

et de la mesure de la surtension S, on déduit u par l'équation du second degré en $tg^2 u$:

$$(36) \qquad S^2\, tg^4 u = \pi^2 (1 + tg^2 u) \left(\frac{\lambda_{g_0}}{\lambda_0}\right)^4$$

dans les cas usuels ($u < 0,2$ rad), cette équation se réduit à

$$(37) \qquad \sin^2 u = \frac{\pi}{S} \left(\frac{\lambda_{g_0}}{\lambda_0}\right)^2.$$

La difficulté, on l'a vu, réside dans la mesure précise de S.

La surtension d'un circuit résonnant théorique

est liée au taux d'ondes stationnaires en amont par la formule

$$s = \frac{\tau_1 - 1}{2\sqrt{\tau_1}} \, \frac{f_0}{|f_1 - f_2|}, \tag{38}$$

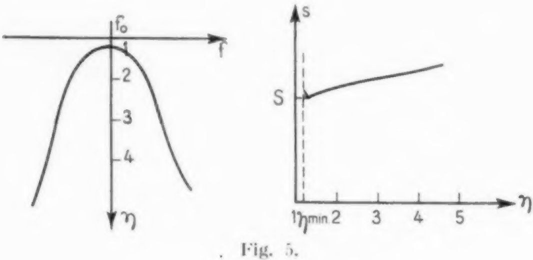


Fig. 5.

(f_1 et f_2 fréquences correspondantes au taux τ_1).

La surtension de la cavité résonnante s'obtiendra en cherchant la limite de s (formule précédente) lorsque $|f_1 - f_2|$ tend vers zéro.

Par suite des pertes dans la cavité, le taux minimum à l'accord est toujours légèrement supérieur à 1 ($\tau_{min} = 1 + p^2$), il en résulte que lorsque $(f_1 - f_2)$ tend vers zéro s tend vers l'infini.

Il est bien entendu que c'est le taux $\tau_1' = \tau_1 - \tau_{min}' + 1$ qu'il faut considérer pour chercher la limite de la formule (38) (*fig.* 5).

Les obstacles utilisés dans la réalisation des cavités de filtres ont souvent une épaisseur très petite devant la longueur d'onde et l'on peut, sans erreur appréciable les assimiler à des obstacles infiniment minces.

On a alors dans ce cas des obstacles minces, la formule simple $\varphi = \pi + u$. La mesure de la fréquence d'accord suffit alors au calcul de u.

3. Réalisation pratique des obstacles.

La nécessité d'obtenir des surtensions élevées élimine l'emploi des obstacles capacitifs.

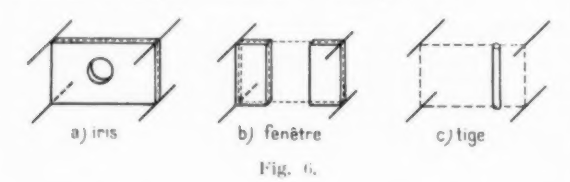


Fig. 6.

La littérature décrit différents types d'obstacles inductifs minces : iris, fenêtre, tige unique (*fig.* 6).

Ces obstacles ne nous ont pas permis d'atteindre en pratique les performances exigées pour les filtres du faisceau hertzien Paris-Lille.

Dans ce problème, le taux d'ondes stationnaires devait rester inférieur à 1,1 dans des bandes de 20 à 30 Mc/s autour de fréquences comprises entre 3 500 et 4 000 Mc/s. Ceci exigeait pour chaque cavité des filtres : d'une part un taux d'ondes stationnaires limité uniquement par les pertes, donc l'égalité parfaite des deux obstacles, d'autre part la réalisation des surtensions calculées à quelques pour-cent près.

On ne peut y parvenir en pratique, en utilisant des iris ou des fenêtres (*cf.* I, 5) : les précisions auxquelles on arrive étant incompatibles avec les nécessités de fabrication (fraisage, déformation au brasage), et surtout de fabrication en série.

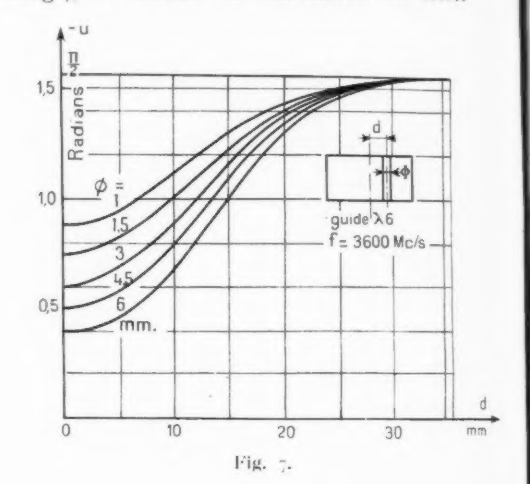


Fig. 7.

L'obstacle constitué par une seule tige ne présente guère d'intérêt, par suite de sa trop grande transmission. Il serait possible de diminuer cette transmission en augmentant le diamètre de la tige ($\Phi > 5$ mm), mais l'expérience a montré qu'on augmentait alors sensiblement les pertes. La figure 7 indique, à titre d'exemple, les valeurs du paramètre u, en fonction de l'écartement du centre pour des tiges de différentes grosseurs.

L'obstacle composé de plusieurs tiges minces parallèles échappe à ces défauts (*).

Une tige agit d'autant plus qu'elle est située plus près du centre de la section droite du guide. On peut donc, par exemple, ajuster la valeur d'un obstacle en agissant sur les tiges éloignées du centre (en faisant varier leur diamètre ou leur position). Certaines dispositions permettent d'obtenir une valeur extrémale de $|u|$ diminuant ainsi la précision utile sur la position des tiges.

(*) Brevet français n° 597.682 du 5 octobre 1950. Perfectionnement aux filtres U. H. F.

En fabrication, une précision et une régularité bien supérieure conduisant à des performances bien meilleures peuvent être atteintes en utilisant des calibres de perçage.

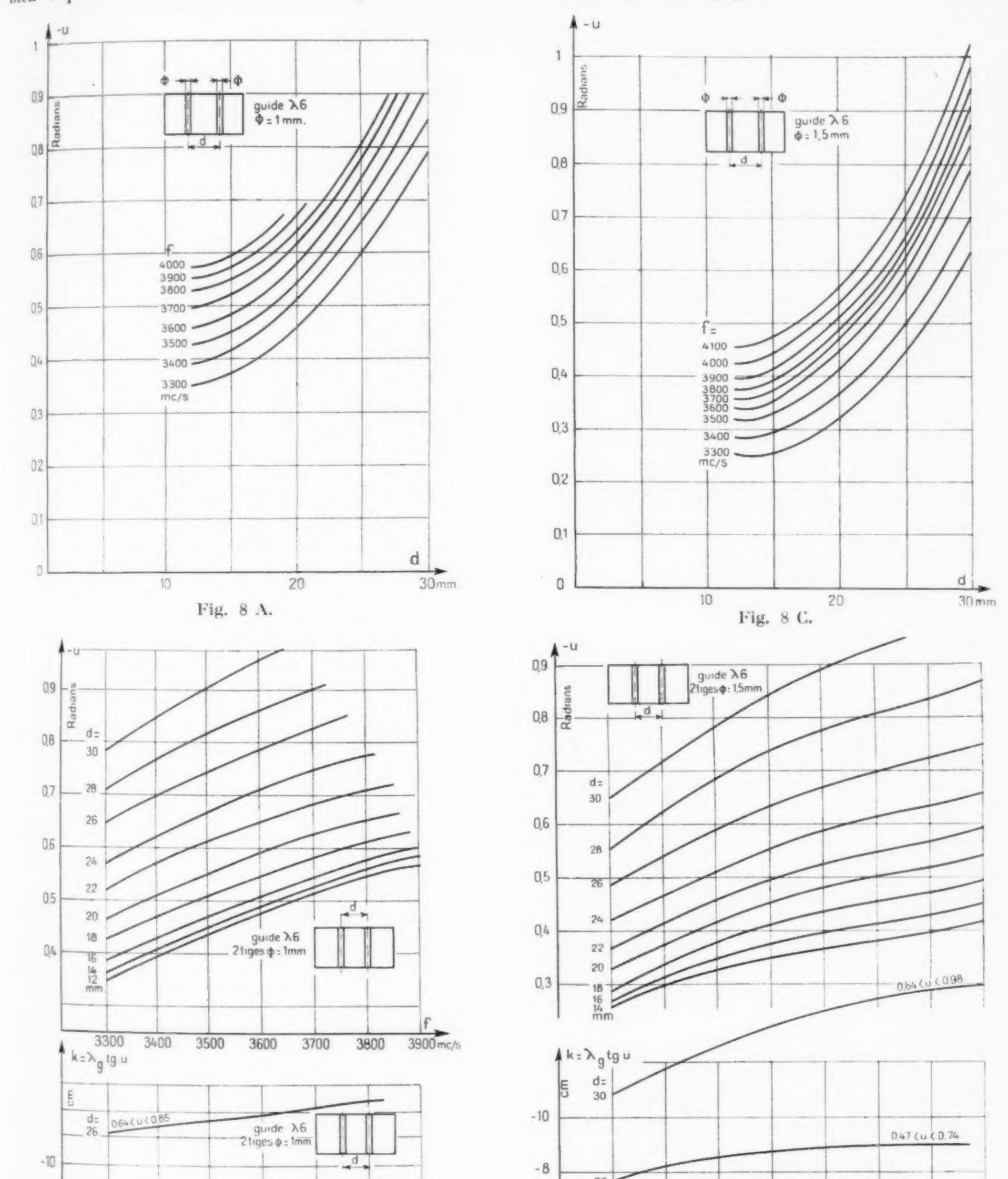


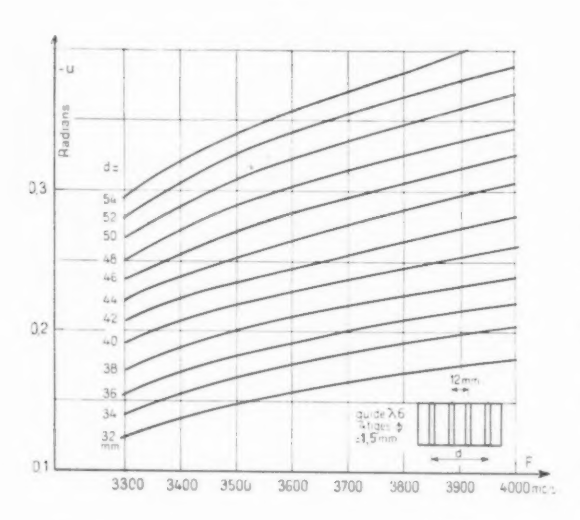
Fig. 8 A.

Fig. 8 C.

Fig. 8 B.

Fig. 8 D.

Fig. 8 E.



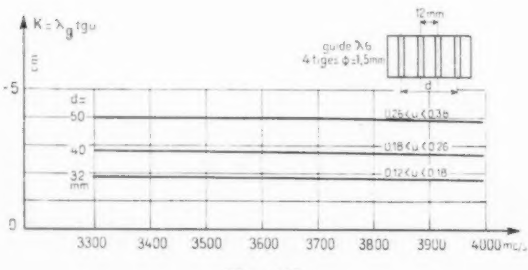


Fig. 8 F.

Il semble enfin que les pertes soient nettement moins importantes dans un réseau de tiges minces que dans une fenêtre, un iris ou un ensemble de tiges épaisses de même coefficient de réflexion.

Ceci s'expliquerait par une meilleure répartition des courants dans le réseau.

L'obstacle constitué par deux tiges symétriques de 1 à 2 mm de diamètre permet la réalisation de cavités de faibles et moyennes surtensions (15 à 80).

Le minimum de transmission se produit alors lorsque les tiges partagent la section droite du guide en trois fenêtres sensiblement égales.

De fortes surtensions (100 à 200) sont obtenues facilement avec quatre tiges de 1 à 2 mm de diamètre. La réalisation de filtres passe-bande ne

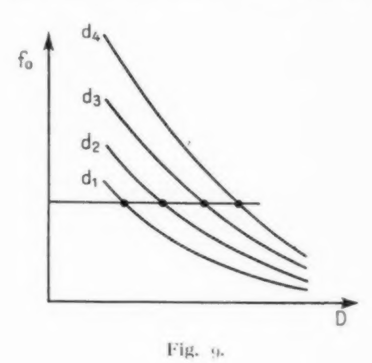


Fig. 9.

nécessite généralement pas de surtensions supérieures, mais il va de soi que l'on peut atteindre des valeurs considérables par l'utilisation de réseaux de tiges. Il faut alors s'attacher à réduire autant que possible les pertes dans les obstacles et dans la cavité [formule (28)] en utilisant systématiquement des guides et tiges en cuivre rouge recouverts, si besoin est, d'une pellicule d'argent.

Les abaques précédents (*fig.* 8) indiquent dans la bande des 3 300 à 4 000 Mc/s, les valeurs du paramètre u d'obstacles constitués par deux et quatre tiges de 1 et 1,5 mm de diamètre sur guide λ_6.

Les mesures ont été effectuées par la seconde méthode.

Pour obtenir les réseaux $u\,(d)$ à fréquence constante, on a d'abord tracé le réseau $f_0\,(D)$, pour divers écartements d des tiges (*fig.* 9).

Les sections de ce réseau par des droites f_0 = const. fournissent alors les valeurs $D\,(d)$ permettant de calculer $u\,(d)$ à la fréquence choisie,

$$\pi + u(d) = \frac{2\,D(d)}{\lambda_{g_0}}.$$

III. — ÉTUDE DU FILTRE PASSE-BANDE EN HYPERFRÉQUENCE.

1. Généralités.

Le filtre passe-bande hyperfréquence dérive du filtre passe-bande basse fréquence, dont la structure est indiquée sur la figure 10.

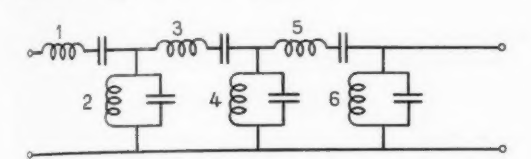


Fig. 10.

Nous avons vu que, sous certaines conditions et dans certaines limites, une cavité résonnante peut être assimilée à un circuit résonnant parallèle.

Or, on démontre [3] que, vu à travers un élément de ligne quart-d'onde, un circuit résonnant parallèle se transforme en un circuit résonnant série.

Le filtre hyperfréquence sera donc constitué par une suite de cavités résonnantes dont les plans de référence seront espacés de l'angle électrique $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (*fig.* 11).

Le calcul du filtre se ramène alors au calcul des

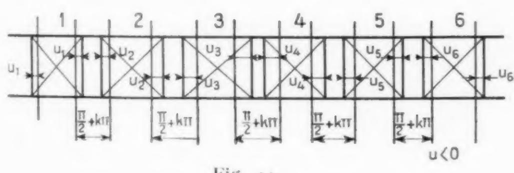


Fig. 11.

systèmes résonnants 1, 2, 3, ... suivant la technique maintenant bien connue des filtres basse fréquence. On peut, en particulier, utiliser la solution dite du « maximally flat » due originellement à Bennett et Darlington [4] et étendue aux hyperfréquences par W. W. Mumford [3].

Rappelons-en les résultats essentiels :

Si n est le nombre de cavités, Q la surtension globale du filtre (définie à partir de la bande à demi-puissance), on a

$$(39) \qquad |T|^2 = \frac{1}{1+(\Omega)^{2n}}, \qquad \text{avec} \quad \Omega = Q\frac{2\Delta f}{f_0}.$$

La surtension de la cavité de rang p est alors

$$(40) \qquad Q_p = \sin\frac{2p-1}{2}\pi$$

et le taux d'ondes stationnaires en amont du filtre est relié aux quantités précédentes par les relations

$$(41) \qquad |T|^2 = \frac{4r_1}{(r_1+1)^2}, \qquad (\Omega)^n = \frac{r_1-1}{2\sqrt{r_1}}.$$

Il est cependant préférable d'étudier directement le comportement d'une succession de cavités résonnantes le long d'une ligne de transmission.

Supposons, en première approximation, ces cavités espacées de l'angle électrique $\frac{\pi}{2}$ invariable avec la fréquence.

Le cas général de n cavités ne conduit à un résultat simple que lorsque ces cavités sont identiques.

On trouve alors [5]

$$(42) \qquad \frac{1}{T} = \frac{x}{2}P_n(x) - P_{n-1}(x) + iP_n(x),$$

avec

$$x = 4Sd.$$

Les polynomes P_n étant les polynomes « électrosphériques » ou de « Tchebycheff » [6], c'est-à-dire des polynomes se déduisant les uns des autres par la relation

$$P_{n-1}(x) + P_{n+1}(x) = xP_n(x),$$

avec

$$P_0(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad P_1(x) = 1.$$

Le calcul aboutit à des résultats beaucoup plus concrets lorsqu'on se limite au cas particulier où n est donné (et généralement petit).

Faisons, à titre d'exemple, le calcul complet d'un filtre à trois cavités.

Un tel système permet d'obtenir des caractéristiques satisfaisant à la plupart des problèmes pratiques.

L'étude d'un filtre à quatre cavités se ferait de la même manière, les calculs étant seulement un peu plus longs et l'écriture un peu plus compliquée.

2. Étude du filtre à trois cavités.

Si t_1, t_2, t_3 sont les coefficients de transmission des cavités; r_1, r_2, r_3 les coefficients de réflexion, on a, ramené au plan de référence de la première cavité :

$$(43) \qquad T = \frac{t_1 t_2 t_3}{(1+r_1 r_2)(1+r_2 r_3) - t_2^2 r_1 r_3}.$$

Soit en fonction des surtensions S_1, S_2, S_3 et en se limitant au terme en d^3 $\left(d = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)$:

$$(44) \qquad \frac{1}{T} = 1 - 8S_2(S_1+S_3)d^2 - i[2(S_1+S_2+S_3)d - 32S_1S_2S_3d^3].$$

a. ÉTUDE DE LA PHASE. — Si Φ est la phase de la transmission, on a

$$(45)\qquad \operatorname{tg}\Phi = \frac{2(S_1+S_2+S_3)d - 32S_1S_2S_3d^3}{1-8S_2(S_1+S_3)d^2},$$

d'où [1] en posant

$$S_1 = S_3 = \alpha S_2 = \alpha S$$

$$(46)\qquad \Phi \# \operatorname{tg}\Phi - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\Phi = 2S(2\alpha+1)d + \frac{8}{3}kS^3d^3,$$

avec

$$(47)\qquad k = 12(\alpha+1)\alpha - (2\alpha+1)^2.$$

Soit $\Delta^3\Phi$, le terme cubique de Φ.

La distorsion sur le temps de transmission est

$$(48)\qquad \Delta^3\tau = 3\frac{\Delta^3\Phi}{\Delta\omega} = \frac{8k}{\Delta\omega}S^3d^3.$$

Il est très intéressant d'examiner la variation de k en fonction de α (*fig.* 12). On voit, d'une part,

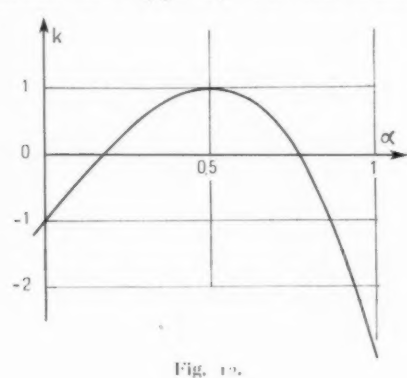


Fig. 12.

que $k(\alpha)$ est stationnaire pour $\alpha = 0,5$ (condition du maximally flat), d'autre part, qu'il s'annule pour $\alpha = 0,18$ et $\alpha = 0,77$. Ces points correspondent à une distorsion du temps de transmission du quatrième ordre au lieu du deuxième. Nous pouvons les qualifier de points de distorsion minima.

La formule (48) donne, en fonction de k, la valeur maximum de S permettant de rester en dessous d'une distorsion donnée sur le temps de transmission.

b. ÉTUDE DU MODULE DE T. — Le module de la transmission T est donné par

$$(49)\qquad \frac{1}{4}\left[\frac{1}{|T|^2} - 1\right] = (S_1 - S_2 + S_3)^2 d^2 - 16S_2[S_1^2(2S_3 - S_2) + S_3^2(2S_1 - S_2)]d^4 + \ldots + (16S_1S_2S_3d^3)^2.$$

ou en faisant $S_1 = S_3 = \alpha S_2 = \alpha S$:

$$(50)\qquad \frac{1}{|T|^2} - 1 = 4S^2d^2[(2\alpha-1) - 16\alpha^2S^2d^2]^2,$$

d'où à l'intérieur de la bande passante

$$(51)\qquad |R| = 2Sd[(2\alpha-1) - 16\alpha^2S^2d^2]$$

et dans la bande atténuée

$$(52)\qquad |T|^2 \# \frac{1}{(32\alpha^2S^3d^3)^2}.$$

Remarque. — Lorsque $\alpha = 0,5$, on a

$$\frac{1}{|T|^2} = 1 + (2Sd)^6,$$

nous constatons la disparition des termes du second et du quatrième ordre et nous retrouvons la formule du « maximally flat » qui comme nous le voyons, porte bien son nom.

Les conditions imposées à un filtre sont, outre la distorsion sur le temps de transmission examinée plus haut, le taux d'ondes stationnaires dans la bande passante et l'atténuation en dehors de cette bande.

Les conditions sur le taux d'ondes stationnaires se ramènent à des conditions sur le coefficient de réflexion.

On a tracé sur la figure 13 la variation de $|R|$ en fonction de $x = 4Sd$.

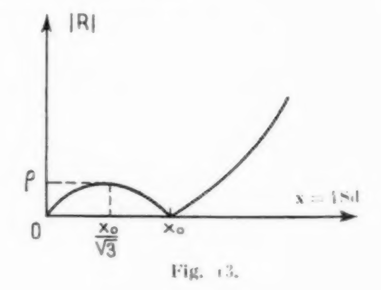


Fig. 13.

On voit que R s'annule pour les valeurs

$$x = 0 \qquad \text{et} \qquad x = x_0 = \frac{\sqrt{2\alpha-1}}{\alpha}.$$

et atteint la valeur maxima ρ pour $x = \frac{x_0}{\sqrt{3}}$:

$$(53)\qquad \rho = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{2\alpha-1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Les variations de ρ en fonction de α sont indiquées sur la figure 14. On voit que $\rho(\alpha)$ est stationnaire pour $\alpha = \frac{1}{2}$, comme $k(\alpha)$. Il est inférieur à $\frac{1}{20}$ ($\eta < 1,06$) si α est compris entre 0,40 et 0,65.

[1] Cette notation α n'a aucun rapport avec le α défini p. 5.

En résumé, le calcul du filtre peut se faire de la façon suivante :

— de la condition de distorsion sur le temps de transmission, on déduit une valeur supérieure de S, fonction de α [formule (48)];

— de la condition de taux d'ondes stationnaires imposé dans la bande passante, on déduit une valeur supérieure de S fonction de α [formules (51) et (53)];

— de ou des conditions d'affaiblissement dans la bande atténuée, on déduit une ou des valeurs inférieures de S également fonction de α [formule (52)].

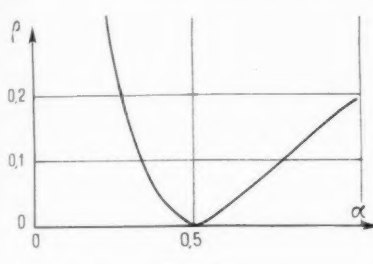


Fig. 14.

Exemple. — Les conditions imposées aux filtres du câble hertzien sont les suivantes :

1. une distorsion sur le temps de transmission inférieure à 1 mμs dans la bande de 20 Mc/s;
2. un taux d'ondes stationnaires inférieur à 1,1 (soit $R < 0{,}047$) à l'intérieur de la bande passante;
3. un affaiblissement de 26 db $\left(T^2 = \frac{1}{400}\right)$ à 70 Mc/s de la fréquence centrale, et de 70 db ($T^2 = 10^{-7}$) à 140 Mc/s de cette fréquence, cette condition peut être supprimée si nous tenons compte du désaccord important des lignes $\frac{\lambda}{4}$.

Le système d'inégalités, solution du problème, se résout graphiquement dans le plan S, α (*fig.* 15). Les courbes délimitent une région du plan dans laquelle les valeurs de α et les surtensions peuvent être acceptées. Nous choisirons comme point représentatif (c'est-à-dire comme valeurs des surtensions $S_1 = S_3$, et S_2) le point du plan qui s'écarte le plus du contour; ceci, afin qu'une erreur dans la détermination des surtensions ait le moins de chance de nous éloigner de la région convenable du plan.

Cette région constitue un triangle curviligne dont nous choisirons approximativement le barycentre comme point de fonctionnement.

D'où, les valeurs

$$\alpha = 0{,}6, \qquad S = 70.$$

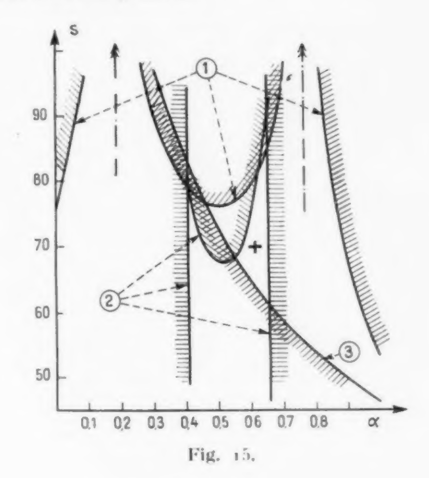


Fig. 15.

3. Réalisations pratiques.

La figure 16 représente une cavité résonnante réalisée comme il a été décrit plus haut.

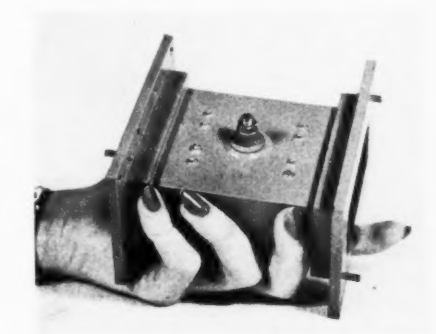


Fig. 16.

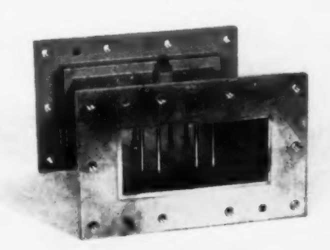


Fig. 16 *bis*.

La tige centrale que l'on aperçoit sur la face supérieure du guide permet d'ajuster la fréquence d'accord de la cavité.

Un tel système agissant seulement par diminution de la fréquence, on doit toujours prévoir les cavités de façon à ce qu'elles résonnent légèrement au-dessus de la fréquence choisie.

La figure 17 représente un filtre complet à trois



Fig. 17.

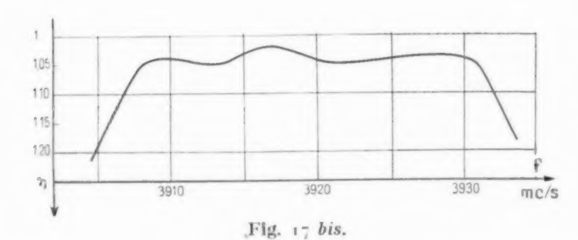


Fig. 17 *bis*.

éléments, et la figure 17 *bis*, la courbe de réponse de ce filtre dans sa bande passante. Le taux d'ondes stationnaires se maintient en dessous de 1,05 dans une bande passante de 27 Mc/s. L'atténuation hors bande est de 27 db à 70 Mc/s de la fréquence centrale. La figure 18 représente un filtre à dix cavités, du type maximally flat dont la surtension des deux cavités centrales est de 110. Son taux d'ondes stationnaires est inférieur à 1,2 dans une bande de 23 Mc/s. Il est équivalent du point de vue déphasage et temps de transmission dans la bande à une ligne coaxiale dans l'air de 23 m de longueur; la vitesse de groupe de l'onde transmise est trente fois plus petite que dans l'air et varie très peu dans la bande.

On remarquera que toutes les cavités sont sur un même élément de guide. Ceci grâce à une nouvelle technique de réglage. En effet, il est absolument nécessaire pour avoir des ondes stationnaires faibles de régler séparément l'accord de chaque cavité à la même fréquence. D'habitude, cela impose autant d'éléments de guide que de cavités. Le filtre définitif comporte ainsi un grand nombre de brides.

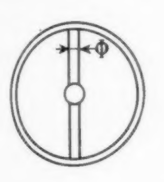
Pour l'éviter, nous perçons la totalité des trous des tiges obstacles. Nous enfonçons les tiges qui correspondent à une première cavité, nous la réglons par le plongeur central dont nous connaissons exactement l'enfoncement grâce à un collier. Ceci fait, nous retirons les tiges et le plongeur et réglons la cavité suivante par le même procédé. Il n'y a donc sur le guide qu'une seule cavité à la fois. Si nous enfonçons à nouveau tiges et plongeur, nous retrouvons exactement l'accord d'une cavité quelconque, tel que nous l'avions déjà obtenu. Pour obtenir le filtre réglé, il ne reste plus qu'à enfoncer tiges et plongeurs, bloquer les plongeurs, enlever les colliers de serrage. La possibilité d'un tel réglage est due évidemment au fait expérimental qu'il n'est pas nécessaire de souder les tiges au guide pour obtenir de bonnes performances. *Un tel procédé serait impensable avec des iris ou des fenêtres et présente un gros avantage pratique pour des filtres à grand nombre de cavités.*



Fig. 18.

4. Filtres hyperfréquence sur ligne coaxiale.

On n'a considéré jusqu'ici que le cas où la ligne de propagation est un guide d'onde. La théorie que



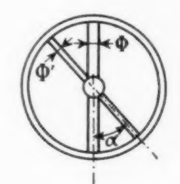


Fig. 19.

nous venons de développer est aussi applicable aux lignes coaxiales. Les filtres réalisés présentent alors l'avantage d'être beaucoup moins encombrants que les filtres sur guides équivalents :

filtre complet à quatre éléments et la figure 21 *bis*, la courbe de réponse de ce filtre dans sa bande passante.



Fig. 20.

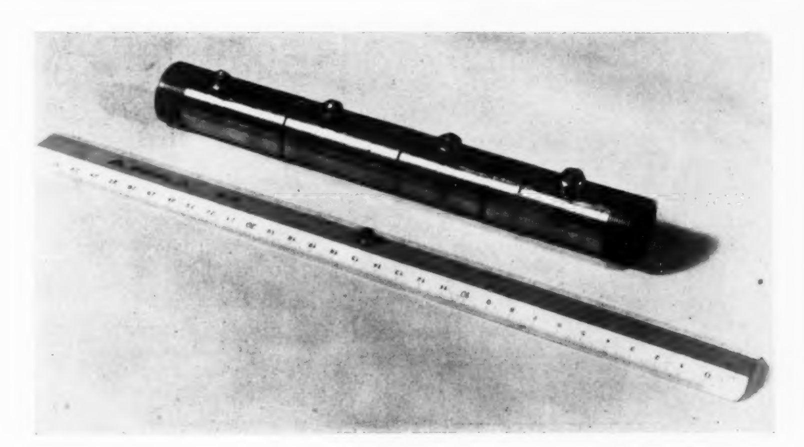


Fig. 21.

— d'une part, à cause des dimensions latérales plus faibles;

— d'autre part, parce que la longueur d'onde dans le coaxial est la même que la longueur d'onde dans l'air.

La réalisation mécanique en est par contre beaucoup plus délicate.

Les obstacles sont constitués comme dans le cas des guides, par des tiges radiales court-circuitant le champ électrique ($u < 0$) et fournissent du même coup une solution élégante au problème de la fixation du conducteur intérieur (*fig.* 19).

La figure 20 représente une cavité résonnante réalisée sur ligne coaxiale 75 Ω, la figure 21, un

Le réglage de chaque cavité se fait comme dans

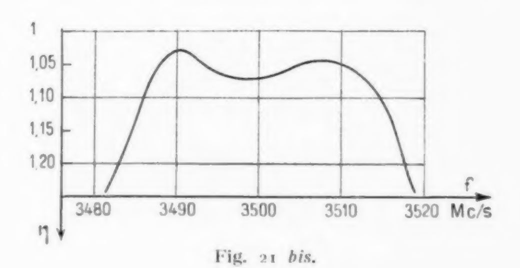


Fig. 21 *bis*.

le cas des filtres sur guide, au moyen d'un plongeur d'appoint.

CONCLUSION.

Cette étude nous a permis d'aboutir à deux séries de résultats.

Nous avons d'abord développé une méthode de calcul simple adaptée aux problèmes posés par les filtres en hyperfréquence. Nous avons ainsi pu évaluer simplement et avec précision la validité de l'assimilation d'une cavité et d'un circuit oscillant, exprimer l'influence des pertes et de l'inégalité des obstacles pour une cavité, enfin calculer le comportement d'un filtre à trois cavités et déterminer ses caractéristiques.

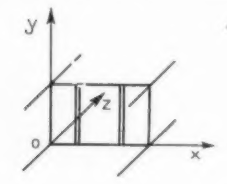
D'autre part, nous avons introduit un nouveau type d'obstacle mince permettant d'atteindre, en pratique, des performances améliorées et de simplifier la fabrication des filtres. Des abaques sont donnés pour ces obstacles.

Ces différents résultats aboutissent à la réalisation de filtres passe-bande sur guide et également sur coaxial, dont la qualité répond aux besoins techniques des faisceaux hertziens tel que le Paris-Lille.

ANNEXE.

Calcul des paramètres d'un obstacle inductif sur guide rectangulaire ([1]).

Le guide est rapporté au trièdre trirectangle habituel, Oz est la direction de propagation (*fig.* 22).



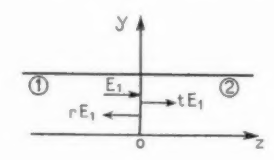


Fig. 22.

On suppose que seul le mode $TE_{0,1}$ peut se propager dans ce guide.

L'obstacle, introduit dans le plan $z = 0$, se composant de tiges parallèles au champ électrique incident ne peut donner naissance qu'à des modes du même type ($TE_{0,n}$).

L'état électromagnétique du système est alors défini par les seules composantes $E_y(x, z)$ et $H_x(x, z)$.

On sait que l'on a pour le mode d'ordre n :

$$E_{y,n} = E_x \sin\frac{n\pi x}{a} e^{-\Gamma_n z},$$

$$H_{x,n} = \frac{E_{y,n}}{Z_n},$$

avec

$$Z_n = \frac{j\omega\mu}{\Gamma_n} \quad \text{et} \quad \Gamma_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda^2}},$$

E_1 désignant l'onde incidente, on peut écrire dans l'espace 1 :

$$E_y = E_1 \sin\frac{\pi x}{a} e^{-\Gamma_1 z} + rE_1 \sin\frac{\pi x}{a} e^{\Gamma_1 z} + \sum_2^\infty E_n \sin\frac{n\pi x}{a} e^{\Gamma_n z},$$

$$H_x = \frac{E_1}{Z_1} \sin\frac{\pi x}{a} e^{-\Gamma_1 z} - rE_1 \sin\frac{\pi x}{a} e^{\Gamma_1 z} - \sum_2^\infty \frac{E_n}{Z_n} \sin\frac{n\pi x}{a} e^{\Gamma_n z}$$

et dans l'espace 2 :

$$E_y = tE_1 \sin\frac{\pi x}{a} e^{-\Gamma_1 z} + \sum_2^\infty E_n \sin\frac{n\pi x}{a} e^{-\Gamma_n z},$$

$$H_x = \frac{tE_1}{Z_1} \sin\frac{\pi x}{a} e^{-\Gamma_1 z} + \sum_2^\infty E_n \sin\frac{n\pi x}{a} e^{-\Gamma_n z}.$$

Écrivons maintenant la continuité des champs dans le plan de l'obstacle ($z = 0$) :

Champ électrique :

$$E_1 + rE_1 = tE_1;$$

Champ magnétique :

$$\frac{E_1 - rE_1}{Z_1} = \frac{tE_1}{Z_1} + 2\sum_2^\infty \frac{E_n}{Z_n} \sin\frac{n\pi x}{a};$$

posant

$$t = -i \sin u \, e^{iu},$$

$$r = -\cos u \, e^{iu},$$

la première condition est automatiquement réalisée, la seconde s'écrit

$$\frac{E_1}{Z_1}(1 + \cos u) e^{iu} \sin\frac{\pi x}{a} = -i\frac{E_1}{Z} \sin u \, e^{iu} \sin\frac{\pi x}{a} + 2\sum_2^\infty \frac{E_n}{Z_n} \sin\frac{n\pi x}{a},$$

soit

$$\frac{E_1}{Z_1} \cos u \, e^{iu} \sin\frac{\pi x}{a} = \sum_2^\infty \frac{E_n}{Z_n} \sin\frac{n\pi x}{a}.$$

On a, d'autre part

$$E_n = \frac{2}{a}\int_\sigma E_y(x) \sin\frac{n\pi x}{a} \, dx,$$

σ représentant le contour des ouvertures délimitées par les obstacles.

([1]) Les principes de ce calcul ont été exposés par J. W. Miles dans les *Proc. Inst. Rad. Eng.* d'octobre 1945.

La condition de continuité des champs devient

$$\frac{E_1}{Z_1}\cos u\, e^{iu} \sin\frac{\pi x}{a} = \frac{1}{a}\int_\sigma E_y(x')\, G(x, x')\,\mathrm{d}x',$$

avec

$$G(x, x') = 2\sum_2^\infty \frac{1}{Z_n}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x'}{a}.$$

Le problème se ramène donc à la résolution des deux équations suivantes :

$$\cos u\, e^{iu} \sin\frac{\pi x}{a} = \frac{Z_1}{a E_1}\int_\sigma E_y(x)\, G(x, x')\,\mathrm{d}x',$$

$$\sin u\, e^{iu} = \frac{2i}{a E_1}\int_\sigma E_y(x)\sin\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{d}x.$$

Multiplions la première par E_y, intégrons le long du contour σ et divisons l'équation obtenue membre à membre avec la seconde.

On trouve

$$\frac{1}{\operatorname{tg} u} = -\frac{i}{2} Z_1 \frac{\int_\sigma\int_\sigma E(x)\,E(x')\,G(x, x')\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x'}{\left[\int E(x)\sin\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{d}x\right]^2}$$

ou

$$\frac{1}{\operatorname{tg} u} = -\frac{i}{2} Z_1 \frac{\sum_2^\infty \frac{1}{Z_n}\left[\int_\sigma E(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x\right]^2}{\left[\int_\sigma E(x)\sin\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{d}x\right]^2}$$

ou encore, en remplaçant Z_1 et Z_n par leurs valeurs

$$\frac{1}{\operatorname{tg} u} = -\frac{\lambda_g}{4\pi} \frac{\sum_2^\infty \Gamma_n\left[\int_\sigma E(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x\right]^2}{\left[\int_\sigma E(x)\sin\frac{\pi x}{a}\,\mathrm{d}x\right]^2},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tg} u = \frac{k}{\lambda_g}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. Ortusi, *Étude sur la diffraction et la réflexion des ondes guidées* (*Annales de Radioélectricité*, t. I, n° 2, octobre 1945).

[2] G. L. Ragan, *Microwave transmission circuits* (*Série du M. I. T.*, n° 9).

[3] W. W. Mumford, *Maximally-flat Filters in Wave-guide* (*Bell Syst. Techn. J.*, octobre 1948).

[4] S. Darlington, *J. Math. and Phys.*, vol. 18, septembre 1939.

[5] J. Ortusi, *Bull. Soc. franç. Électr.*, novembre 1946.

[6] M. Parodi, *Application des polynomes électrosphériques à l'étude des systèmes oscillants à un grand nombre de degrés de liberté* (*Mém. Sc. Phys.*, fasc. 47).

CALCUL DE LA DISTORSION D'UNE ONDE MODULÉE EN FRÉQUENCE

PAR J. P. VASSEUR,

Ingénieur E. C. P., Docteur ès Sciences, Ingénieur attaché à la Direction technique de la Société Française Radioélectrique.

SOMMAIRE. — *Les mêmes formules permettent de calculer la distorsion d'une onde modulée en fréquence causée, soit par son passage dans un amplificateur dont le temps de transit est fonction de la fréquence, soit par la superposition d'échos au signal principal, ces échos étant dus à des défauts de propagation ou à des réflexions dans les feeders d'antenne.*
Des formules générales relatives à un signal quelconque et à un régime lent ou rapide de modulation permettent de déterminer la distorsion d'un signal constitué, soit par une fréquence pure, soit par la superposition d'un certain nombre de fréquences pures. Si ce dernier signal provient d'un multiplex, l'accumulation sur un canal d'un certain nombre de fréquences de distorsion crée une diaphonie qui est calculée par une formule due à Lewin, applicable seulement dans le cas du régime lent de modulation. (C. D. U. 621.396.619.13.)

SUMMARY. — *The same formulæ are applicable for calculating distorsion of a frequency-modulated wave caused either by its passing through an amplifier whose transit-time is a function of frequency, or by the superposition of echos on the main signal, such echos being due to propagation faults or to reflexions in antenna feeders.*
General formulæ for a signal of any sort and for slow or rapid modulation enable the calculation to be made of the distortion of a signal consisting either of a pure frequency or of the superposition of a number of pure frequencies. If this latter signal comes from a multiplex the accumulation on a channel of a certain number of distorsion frequencies creates cross-talk which can be calculated from a formula due to Lewin, applicable only for slow modulation conditions. (U. D. C. 621.396.619.13.)

INTRODUCTION.

Les systèmes de transmission à modulation de fréquence sont, en général, plus linéaires que ceux utilisant la modulation d'amplitude. Ils introduisent, toutefois, une certaine distorsion qui provient, non pas de la courbure de la caractéristique des tubes, mais de la variation de la vitesse de groupe du signal en fonction de la fréquence.

La réalisation de multiplex à courants porteurs n'est possible qu'avec un matériel extrêmement linéaire, ce qui conduit à employer uniquement la modulation de fréquence. Malgré cela, la linéarité nécessaire est assez difficile à obtenir. Les différentes causes de distorsion sont :

— La non-linéarité des caractéristiques du modulateur et du discriminateur;

— Le résidu de modulation d'amplitude que laisse passer le limiteur;

— La variation en fonction de la fréquence du temps de transit des amplificateurs;

— La superposition de plusieurs signaux retardés, ces signaux étant dus à des défauts de propagation ou à des réflexions dans les feeders d'antenne.

Le but des calculs qui suivent est de déterminer la distorsion due à ces deux dernières causes.

Nous verrons que les distorsions produites par les amplificateurs et par les échos ont la même origine physique et que l'on peut les calculer par les mêmes formules.

Ces relations permettent de déterminer la fréquence instantanée d'une onde distordue, mais ne permettent pas de prévoir sa modulation d'amplitude. La distorsion calculée ne tient donc pas compte d'une distorsion supplémentaire éventuellement causée par une transformation de la modulation d'amplitude en modulation de phase dans le

limiteur, cet effet étant d'ailleurs nul dans le cas où deux bandes latérales de la modulation d'amplitude sont bien symétriques.

De même, nous ne tenons pas compte, dans nos calculs, d'une distorsion due à l'atténuation différente des bandes latérales par suite d'une variation avec la fréquence du gain du quadripôle. Dans le cas où celui-ci est symétrique autour de la porteuse, cet effet se traduit d'ailleurs simplement par une atténuation (ou un renforcement) des signaux de fréquence élevée.

Par contre, nous ne supposons ni la fréquence de modulation faible, ni la déviation petite, ce qui constitue un progrès par rapport aux formules antérieurement proposées qui étaient relatives à un régime lent de modulation.

LISTE DES SYMBOLES.

Sauf indication spéciale dans le contexte, les symboles utilisés ont la signification suivante :

$a = 2m \sin \frac{\alpha t_0}{2}$;

$a^n = 2m \sin \frac{n \alpha t_0}{2}$;

$a_n = 2m \sin \frac{\alpha_n t_0}{2}$;

$a_n^p = 2m \sin \frac{p \alpha_n t_0}{2}$;

B bande passante d'un circuit bouchon;

D diaphonie globale sur le canal supérieur d'un multiplex;

H_n taux de distorsion d'harmonique n;

J_n fonction de Bessel de 1re espèce d'ordre n;

k taux d'activité du multiplex;

l longueur d'un feeder;

$m = \frac{\Delta\Omega}{\alpha}$ indice de modulation de la fréquence α;

m_n indice de modulation de la fréquence α_n;

N, n, n_1, n_2, ..., p, q nombres entiers;

s signal de modulation;

t temps;

$t' = t - \frac{t_0}{2}$;

t_0 retard entre le signal principal et l'écho ou période d'une courbe de temps de transit;

v vitesse des ondes sur un feeder ou dans l'espace;

α, α_1, α_2, ..., β fréquences angulaires de modulation;

γ pertes en népers d'un feeder;

ξ, χ, θ angles de phase;

ε_n 0 ou 1;

ρ_1, ρ_2 coefficients de réflexion aux deux extrémités d'un feeder;

$\rho = |\rho_1| \, |\rho_2| \, e^{-2\gamma l}$

$\delta = \frac{\Delta\tau}{t_0}$

$\delta_n = \frac{\Delta\tau_n}{n t_0}$

τ temps de transit d'un quadripôle;

τ_0 partie constante de τ;

$\Delta\tau$ partie variable de τ;

$\Delta\tau_n$ coefficients des termes du développement en série de Fourier de τ;

φ, Φ angles de phase;

Ψ_1, Ψ_2 angles de phase;

$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2$ ou angle de phase;

$\psi = \Omega t_0 - \Psi$

$\psi_n = n\Omega t_0 - \Psi_n$

Ω fréquence porteuse;

$\Delta\Omega$ déviation de fréquence;

ω fréquence instantanée.

1. RELATIONS GÉNÉRALES.

1.1. Distorsion dans un feeder mal adapté.

Supposons qu'un générateur d'ondes modulées en fréquence soit relié à une charge par un feeder mal adapté à chacune de ses deux extrémités (*fig.* 1).

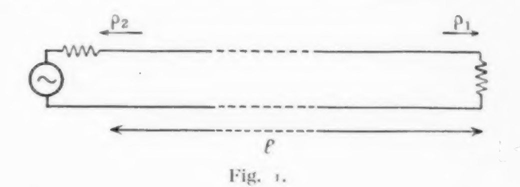


Fig. 1.

La charge va recevoir, d'une part, l'onde venant directement du générateur et, d'autre part, une infinité d'ondes réfléchies successivement sur ses deux extrémités. La superposition à l'onde principale de ces ondes réfléchies va créer une distorsion que nous allons étudier.

Nous supposerons dans toute la suite les coefficients de réflexion assez faibles pour qu'il n'y ait à tenir compte que de la première onde réfléchie, à savoir celle qui n'a fait qu'un seul aller-retour sur le feeder.

Soient l la longueur du feeder, γ la perte qu'il introduit comptée en népers, v la vitesse des ondes sur la ligne, ρ_1 et ρ_2 les coefficients de réflexion de la charge et du générateur qui s'écrivent :

$$\rho_1 = |\rho_1| \, e^{j\Psi_1}, \qquad \rho_2 = |\rho_2| \, e^{j\Psi_2}.$$

Soit t_0 le retard correspondant à la durée d'un aller-retour des ondes sur le feeder

$$t_0 = \frac{2l}{v}.$$

Soit $\cos[\Omega t + s(t)]$ l'onde émise par le générateur, l'onde directe qui atteint la charge est retardée de $\frac{t_0}{2}$ et s'écrit

$$\cos\left[\Omega\left(t - \frac{t_0}{2}\right) + s\left(t - \frac{t_0}{2}\right)\right].$$

L'onde qui revient sur la charge après s'être réfléchie successivement sur cette charge et sur le générateur subit un retard supplémentaire de t_0 et une atténuation $|\rho_1| . |\rho_2| e^{-2\gamma l}$, elle s'écrit

$$|\rho_1| . |\rho_2| e^{-2\gamma l} \times \cos\left[\Omega\left(t - \frac{3t_0}{2}\right) + s\left(t - \frac{3t_0}{2}\right) + \Psi_1 + \Psi_2\right]$$

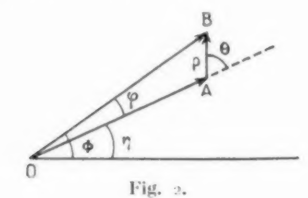


Fig. 2.

ou

(1) $$\rho \cos\left[\Omega\left(t - \frac{t_0}{2}\right) + s\left(t - \frac{3t_0}{2}\right) - \psi\right]$$

en posant

$$\rho = |\rho_1| . |\rho_2| e^{-2\gamma l},$$
$$\psi = \Omega t_0 - \Psi_1 - \Psi_2.$$

Nous pouvons (*fig.* 2) représenter vectoriellement l'onde principale reçue par la charge par un vecteur OA de longueur 1 et faisant, avec une origine fixe, un angle

$$\eta = \Omega\left(t - \frac{t_0}{2}\right) + s\left(t - \frac{t_0}{2}\right).$$

L'onde qui atteint la charge après deux réflexions est représentée par un vecteur AB de longueur ρ et faisant avec OA un angle

$$\begin{aligned}\theta = {} & \Omega\left(t - \frac{t_0}{2}\right) + s\left(t - \frac{t_0}{2}\right) \\ & - \Omega\left(t - \frac{3t_0}{2}\right) - s\left(t - \frac{3t_0}{2}\right) - \Psi_1 - \Psi_2, \\ = {} & s\left(t - \frac{t_0}{2}\right) - s\left(t - \frac{3t_0}{2}\right) + \psi.\end{aligned}$$

L'onde résultante reçue par la charge est représentée par le vecteur OB et nous nous proposons de calculer la phase de cette onde c'est-à-dire l'angle Φ que fait OB avec une origine fixe. La fréquence instantanée de cette onde sera

$$\omega' = \frac{d\Phi}{dt};$$

OB fait, avec OA, un angle φ donné par

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\rho \sin\theta}{1 + \rho \cos\theta}.$$

Dans toute la suite, nous supposerons ρ petit, de sorte que nous aurons

$$\varphi = \rho \sin\theta = \rho \sin\left[s\left(t - \frac{t_0}{2}\right) - s\left(t - \frac{3t_0}{2}\right) + \psi\right].$$

On a donc

(2) $$\begin{aligned}\Phi &= \eta + \varphi, \\ \Phi &= \Omega\left(t - \frac{t_0}{2}\right) + s\left(t - \frac{t_0}{2}\right) \\ &\quad + \rho \sin\left[s\left(t - \frac{t_0}{2}\right) - s\left(t - \frac{3t_0}{2}\right) + \psi\right]\end{aligned}$$

et la fréquence instantanée de l'onde reçue par la charge est

(3) $$\begin{aligned}\omega = {} & \Omega + s'\left(t - \frac{t_0}{2}\right) \\ & + \rho\left[s'\left(t - \frac{t_0}{2}\right) - s'\left(t - \frac{3t_0}{2}\right)\right] \\ & \times \cos\left[s\left(t - \frac{t_0}{2}\right) - s\left(t - \frac{3t_0}{2}\right) + \psi\right].\end{aligned}$$

Dans cette relation, le premier terme représente la porteuse, le second la modulation retardée d'un temps correspondant à la longueur du feeder et le troisième la distorsion introduite par l'écho.

Remarquons au passage que nous avons supposé pour établir la formule (3) que ρ était petit, mais que aucune hypothèse n'a été faite sur la vitesse de la modulation.

Nous savons qu'en modulation de fréquence la distorsion est due à une variation du temps de transit des ondes avec la fréquence. Calculons donc le temps de transit d'un feeder mal adapté.

L'onde émise par le générateur étant $\cos\Omega t$, nous trouvons, d'après la formule (2), que l'onde reçue par la charge est

$$\cos\left[\Omega\left(t - \frac{t_0}{2}\right) + \rho \sin\psi\right].$$

Le déphasage introduit par le feeder est donc

(4) $$\zeta = \Omega\frac{t_0}{2} - \rho \sin\psi = \Omega\frac{t_0}{2} - \rho \sin[\Omega t_0 - \Psi_1 - \Psi_2]$$

et le temps de transit sur le feeder est

$$\tau = \frac{d\zeta}{d\Omega} = \frac{t_0}{2} - \rho t_0 \cos[\Omega t_0 - \Psi_1 - \Psi_2],$$

$$(5)\qquad \tau = \frac{t_0}{2} - \Delta\tau \cos(\Omega t_0 - \Psi)$$

en posant

$$(6)\qquad \Delta\tau = \rho t_0, \qquad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2.$$

Nous pouvons donc conclure qu'une variation du temps de transit définie par (5) donne une distorsion calculée par (3).

On peut calculer cette distorsion par une méthode un peu différente. La courbe de phase du feeder définie par (4) est celle que l'on relèverait par des mesures statiques. Si la modulation est assez lente, on peut supposer qu'à chaque instant la fréquence instantanée est déphasée de la même quantité qu'une fréquence entretenue de même valeur.

Avec ces hypothèses, la phase à l'entrée du feeder étant $\Omega t + s(t)$, la phase à la sortie est $\Omega t + s(t) - \zeta$, ζ étant relatif à la fréquence instantanée d'entrée

$$\omega_e = \Omega + s'(t),$$

c'est-à-dire, d'après (4),

$$\zeta = \omega_e \frac{t_0}{2} - \rho \sin(\omega_e t_0 - \Psi).$$

La fréquence instantanée à la sortie du feeder est alors

$$\omega = \Omega + s'(t) - \frac{d\zeta}{d\omega_e}\frac{d\omega_e}{dt}.$$

Or,

$$\frac{d\zeta}{d\omega_e} = \tau = \frac{t_0}{2} - \Delta\tau \cos[\omega_e t_0 - \Psi],$$

$$\frac{d\omega_e}{dt} = s''(t),$$

d'où

$$(7)\qquad \omega = \Omega + s'(t) - \tau s''(t)$$

$$= \Omega + s'(t) - \frac{t_0}{2} s''(t) + \Delta\tau\, s''(t) \cos[t_0 s'(t) + \Psi].$$

On peut retrouver la formule (7) à partir de la formule (3) en développant en série de Taylor

$$s\left(t - \frac{t_0}{2}\right) = s(t) - \frac{t_0}{2} s'(t) + \frac{t_0^2}{8} s''(t) \ldots,$$

$$s\left(t - \frac{t_0}{2}\right) - s\left(t - \frac{3t_0}{2}\right) = t_0 s'(t) - t_0^2 s''(t) \ldots,$$

d'où, en reportant dans (3),

$$\omega = \Omega + s'(t) - \frac{t_0}{2} s''(t) + \frac{t_0^2}{8} s'''(t)$$

$$+ \rho[t_0 s''(t) - t_0^2 s'''(t)] \cos[t_0 s'(t) - t_0^2 s''(t) + \Psi].$$

Cette relation devient identique à (7), si l'on ne conserve que le premier terme des développements en série. Ceci exprime que la modulation est lente. En effet, supposons pour simplifier une modulation sinusoïdale

$$s' = \Delta\Omega \cos \alpha t.$$

On a alors

$$t_0 s'' = -\Delta\Omega\alpha\, t_0 \sin \alpha t,$$

$$t_0^2 s'' = -\Delta\Omega\alpha^2 t_0^2 \cos \alpha t.$$

Si la modulation est lente, αt_0 sera petit devant 1 et nous aurons effectivement le droit de ne conserver que le premier terme des développements en série de Taylor, c'est-à-dire d'utiliser la formule (7).

Dans cette formule, le premier terme représente la porteuse, le second terme la modulation non retardée et le troisième est un terme en quadrature qui représente, tant qu'il est petit, le retard sur la modulation dû à la propagation le long du feeder; enfin, le quatrième terme représente la distorsion.

Il est évident que les calculs précédents s'appliquent exactement à la distorsion causée par un écho dû à une mauvaise propagation, cet écho ayant un retard t_0 par rapport au signal principal et une amplitude relative ρ supposée petite.

1.2. Distorsion par un quadripôle quelconque.

Envisageons maintenant le passage d'une onde modulée en fréquence dans un quadripôle quelconque, par exemple un amplificateur ou un filtre.

Négligeons la distorsion due à l'atténuation différente des bandes latérales et calculons uniquement celle due à la variation du temps de transit en fonction de la fréquence.

Nous poserons le temps de transit du quadripôle sous la forme

$$(8)\qquad \tau = \tau_0 - \Delta\tau_1 \cos(\omega t_0 - \Psi_1) - \ldots$$

$$- \Delta\tau_n \cos(n\omega t_0 - \Psi_n) - \ldots$$

et n'attacherons pas d'importance au retard constant qui ne crée aucune distorsion et que nous supposerons ajustable à volonté, par exemple en faisant suivre le quadripôle d'un câble parfaitement adapté.

Nous pouvons alors créer un quadripôle ayant la même courbe de temps de transit en disposant en série un certain nombre de câbles de temps de parcours $\frac{t_0}{2}, \frac{2t_0}{2}, \ldots, \frac{nt_0}{2}$, ces câbles étant reliés les uns aux autres par des dispositifs ne permettant le transfert d'énergie que dans un seul sens et les coefficients de réflexion aux deux extrémités du $n^{\text{ième}}$ câble étant tels que la somme de leurs angles de phase soit égale à Ψ_n et que le produit de leurs

modules soit égal à $\rho_n = \dfrac{\Delta\tau_n}{n t_0}$ (en tenant éventuellement compte de l'atténuation du câble).

Nous pouvons alors appliquer la formule (3) à ce nouveau quadripôle. L'onde incidente ayant la fréquence instantanée $\Omega + s'(t)$, l'onde sortant du premier câble aura la fréquence

$$\omega = \Omega + s'\left(t - \frac{t_0}{2}\right) + \rho_1\left[s'\left(t - \frac{t_0}{2}\right) - s'\left(t - \frac{t_0}{2} - t_0\right)\right]$$
$$\times \cos\left[s\left(t - \frac{t_0}{2}\right) - s\left(t - \frac{t_0}{2} - t_0\right) + \psi_1\right].$$

Le second câble introduit sur l'ensemble de ce signal un retard $\dfrac{2t_0}{2}$ et amène une nouvelle distorsion sur le signal qui le traverse. En négligeant les termes du deuxième ordre en $\rho_1\rho_2$, on trouve ainsi, à la sortie du deuxième câble, un signal

$$\begin{aligned}\omega = \Omega &+ s'\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2}\right)\\
&+ \rho_1\left[s'\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2}\right) - s'\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2} - t_0\right)\right]\\
&\times \cos\left[\quad s\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left. - s\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2} - t_0\right) + \psi_1\right]\\
&+ \rho_2\left[s'\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2}\right) - s'\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2} - 2t_0\right)\right]\\
&\times \cos\left[\quad s\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2}\right)\right.\\
&\qquad\left. - s\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2} - 2t_0\right) + \psi_2\right].\end{aligned}$$

En continuant ainsi de proche, en proche et en remplaçant le retard constant de l'ensemble des câbles $\dfrac{t_0}{2} + \dfrac{2t_0}{2} + \ldots + \dfrac{pt_0}{2} + \ldots$ par le retard constant τ_0 du quadripôle, on trouve la fréquence instantanée du signal de sortie

$$\begin{aligned}(9) \qquad \omega = \Omega &+ s'(t - \tau_0)\\
&+ \rho_1\,[s'(t - \tau_0) - s'(t - \tau_0 - t_0)]\\
&\times \cos[s(t - \tau_0) - s(t - \tau_0 - t_0) + \psi_1]\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \rho_p\,[s'(t - \tau_0) - s'(t - \tau_0 - pt_0)]\\
&\times \cos[s(t - \tau_0) - s(t - \tau_0 - pt_0) + \psi_p]\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

en se rappelant que

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned}&\rho_1 = \frac{\Delta\tau_1}{t_0}, \quad \ldots, \quad \rho_p = \frac{\Delta\tau_p}{pt_0};\\
&\psi_1 = \Omega t_0 - \Psi_1, \quad \ldots, \quad \psi_p = p\Omega t_0 - \Psi_p.\end{aligned}\right.$$

En résumé, on voit que l'on peut appliquer la formule (3) à chacun des termes du développement en série de Fourier du temps de transit du quadripôle et ajouter les distorsions ainsi obtenues.

Dans le cas du régime lent, on peut refaire le raisonnement direct indiqué plus haut et l'on arrive à la généralisation de la formule (7)

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned}\omega &= \Omega + s'(t) - \tau\; s''(t),\\
\omega &= \Omega + s'(t) - \tau_0\, s''(t)\\
&\quad + s''(t)\,\Delta\tau_1 \cos[\;t_0\, s'(t) + \psi_1] + \ldots\\
&\quad + s''(t)\,\Delta\tau_n \cos[n t_0\, s'(t) + \psi_n] + \ldots,\end{aligned}\right.$$

qui s'interprète de la même façon que (9).

Remarque. — En général, la courbe de réponse d'un quadripôle ne se présente pas sous la forme

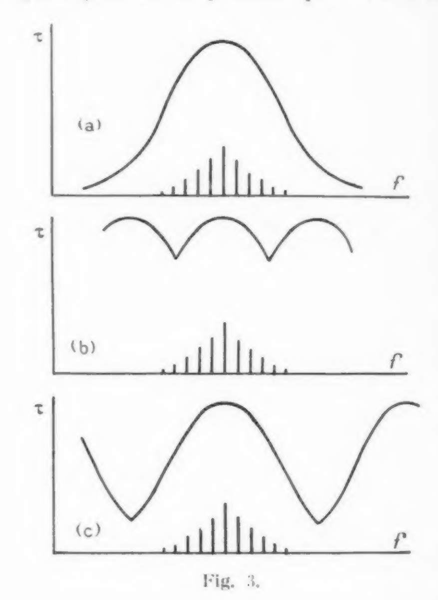


Fig. 3.

périodique (8). Pour appliquer la méthode indiquée, il est nécessaire de prendre un développement en série de Fourier de la courbe de temps de transit du quadripôle. Le temps t_0 est, *a priori*, arbitraire, mais il importe de le choisir assez petit (Rappelons que t_0 représente l'inverse de la période en cycles par seconde de la courbe du temps de transit en fonction de la fréquence).

Considérons, en effet, sur la figure 3 en *a* une courbe de temps de transit et les bandes latérales d'une modulation.

On voit en *b* la courbe de temps de transit représentée par une série (8) relative à un t_0 assez grand. Dans la région intéressée par les bandes latérales, cette courbe ne reproduit pas la courbe initiale *a*. Au contraire, il en est ainsi de la courbe *c* représentée par une série (8) relative à un t_0 plus petit.

de sorte que le calcul de distorsion mené avec la série donnant la courbe c donnera seul un résultat exact.

1.3. Utilisation du calcul symbolique.

Nous rappellerons pour mémoire une méthode utilisant le calcul symbolique, applicable au régime lent et permettant de retrouver les résultats précédents. On suppose connue l'impédance de transfert du quadripôle et, par application de la transformation de Laplace et développements en série, on trouve, après des calculs assez complexes, que la fréquence instantanée sortant du quadripôle a pour expression

$$\omega = \Omega + s'(t) - \tau s''(t),$$

ce que nous avions déjà trouvé en (7) ou en (11).

1.4. Méthode rigoureuse de calcul de la distorsion.

Pour terminer ces considérations générales, nous allons exposer une méthode rigoureuse, due à M. J. Fagot, qui permet le calcul de la distorsion en régime rapide et en tenant compte de l'affaiblissement différent des bandes latérales. Malheureusement, cette méthode ne se prête qu'à des calculs numériques, d'ailleurs très longs.

Supposons l'onde incidente modulée en fréquence par une sinusoïde, soit $\sin(\Omega t + m \sin \alpha t)$.

Le spectre de cette onde s'écrit

$$\begin{aligned} & J_0(m) \sin \Omega t \\ & \quad + J_1(m) [\sin(\Omega + \alpha)t - \sin(\Omega - \alpha)t] \\ & \quad + J_2(m) [\sin(\Omega + 2\alpha)t + \sin(\Omega - 2\alpha)t]. \\ & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Après passage dans le quadripôle, supposé pour simplifier symétrique autour de la fréquence Ω, les bandes latérales d'ordre n sont atténuées dans le rapport a_n et déphasées de φ_n. Ces bandes latérales étant des ondes entretenues, a_n et φ_n sont données par les courbes statiques du quadripôle.

Le spectre de sortie est donc

$$\begin{aligned} & J_0(m) \sin \Omega t \\ & \quad + a_1 J_1(m) \{\sin[(\Omega + \alpha)t - \varphi_1] - \sin[(\Omega - \alpha t) + \varphi_1]\} \\ & \quad + a_2 J_2(m) \{\sin[(\Omega + 2\alpha)t - \varphi_2] + \sin[(\Omega - 2\alpha)t + \varphi_2]\} \\ & \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Et l'on voit que la phase de cette onde est donnée par

$$(12) \quad \Phi = \operatorname{Arc\,tg} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} 2 a_{2n+1} J_{2n+1}(m) \sin[(2n+1)\alpha t - \varphi_{2n+1}]}{J_0(m) + \sum_{n=1}^{\infty} 2 a_{2n} J_{2n}(m) \cos(2n\alpha t - \varphi_{2n})}.$$

La méthode consiste alors à tracer, points par points, la courbe $\Phi(t)$, puis à en faire l'analyse harmonique pour en déduire la distorsion.

Ces calculs ont été faits dans quelques cas particuliers avec le concours de l'Institut Henri Poincaré.

2. DISTORSION D'UNE FRÉQUENCE PURE.

2.1. Distorsion par un feeder.

Nous allons d'abord calculer la distorsion produite par un feeder (ou par un amplificateur dont le temps de transit est une fonction sinusoïdale de la fréquence). De plus, pour simplifier les notations, nous prendrons l'origine des temps à la sortie du feeder ou de l'amplificateur, c'est-à-dire que nous ne tiendrons pas compte du retard constant $\frac{t_0}{2}$ ou τ_0 introduit et que nous remplacerons $t - \frac{t_0}{2}$ ou $t - \tau_0$ par t.

Les formules de base (3) et (7) s'écrivent alors

$$\begin{aligned} (3') \quad \omega = {} & \Omega + s'(t) \\ & + \rho[s'(t) - s'(t - t_0)] \cos[s(t) - s(t - t_0) + \psi], \end{aligned}$$

$$(7') \quad \omega = \Omega + s'(t) + s''(t) \Delta\tau \cos[t_0 s'(t) + \psi].$$

Soit une modulation par une fréquence pure

$$(13) \quad s(t) = m \sin \alpha t.$$

Appliquons la formule exacte (3′) relative au régime rapide, il vient

$$\begin{aligned} \omega = {} & \Omega + m\alpha \cos \alpha t + \rho m \alpha [\cos \alpha t - \cos \alpha(t - t_0)] \\ & \times \cos[m \sin \alpha t - m \sin \alpha(t - t_0) + \psi], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega = {} & \Omega + m\alpha \cos \alpha t - 2\rho m \alpha \sin \frac{\alpha t_0}{2} \sin \alpha\left(t - \frac{t_0}{2}\right) \\ & \times \cos\left[2m \sin \frac{\alpha t_0}{2} \cos \alpha\left(t - \frac{t_0}{2}\right) + \psi\right]. \end{aligned}$$

Et calculons l'expression

$$A = \sin \alpha t' \cos[a \cos \alpha t' + \psi]$$

en posant

$$t' = t - \frac{t_0}{2}, \qquad a = 2m \sin \frac{\alpha t_0}{2}.$$

On a

$$A = \cos\psi \sin \alpha t' \cos[a \cos \alpha t'] - \sin\psi \sin \alpha t' \sin[a \sin \alpha t'].$$

Or,

$$\cos[a \cos \alpha t'] = J_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{2n}(a) \cos 2n\alpha t',$$

$$\sin[a \cos \alpha t'] = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{2n+1}(a) \cos(2n+1)\alpha t',$$

d'où

$$X = \cos\psi \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n J_{2n}(a) - (-1)^{n+1} J_{2n+2}(a)] \sin(2n+1)\alpha t'$$
$$- \sin\psi \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1} J_{2n-1}(a) - (-1)^n J_{2n+1}(a)] \sin 2n\alpha t'.$$

Et en tenant compte de la relation de récurrence

$$J_{n-1}(a) + J_{n+1}(a) = \frac{2n}{a} J_n(a),$$

$$X = \frac{2}{a} \cos\psi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) J_{2n+1}(a) \sin(2n+1)\alpha t'$$
$$+ \frac{2}{a} \sin\psi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n J_{2n}(a) \sin 2n\alpha t',$$

ce qui s'écrit sous la forme condensée

$$X = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} n J_n(a) \sin\left(\psi + \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\alpha t'.$$

Et, en reportant, il vient

$$(14) \quad \omega = \Omega + m\alpha \cos\alpha t - 2\rho\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n J_n\left(2m \sin\frac{\alpha t_0}{2}\right) \times \sin\left(\psi + \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\alpha\left(t - \frac{t_0}{2}\right).$$

Nous trouvons, dans cette expression, un terme de distorsion à la fréquence α, approximativement en quadrature avec la modulation principale quand αt_0 est petit et des harmoniques de fréquence 2α, 3α, ...

En rapportant l'amplitude de ces harmoniques à l'amplitude $m\alpha$ de la modulation principale, on trouve les taux de distorsion harmonique

$$(15) \quad \begin{cases} H_1 = \dfrac{2\rho}{m} J_1\left(2m \sin\dfrac{\alpha t_0}{2}\right) \cos\psi, \\ H_2 = \dfrac{4\rho}{m} J_2\left(2m \sin\dfrac{\alpha t_0}{2}\right) \sin\psi, \\ H_3 = \dfrac{6\rho}{m} J_3\left(2m \sin\dfrac{\alpha t_0}{2}\right) \cos\psi, \\ H_n = \dfrac{2n\rho}{m} J_n\left(2m \sin\dfrac{\alpha t_0}{2}\right) \sin\left(\psi + \dfrac{n\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Ces relations sont valables en régime rapide et aussi bien en modulation de phase qu'en modulation de fréquence.

Si l'on se trouve en régime lent, αt_0 est petit et l'on peut remplacer l'argument des fonctions de Bessel $2m \sin\frac{\alpha t_0}{2}$ par $m\alpha t_0$ ou par $t_0 \Delta\Omega$, $2\Delta\Omega$ étant la déviation de fréquence pointe à pointe. En effet, en modulation de fréquence $m = \frac{\Delta\Omega}{\alpha}$ et en modulation de phase

$$m = \Delta\Phi \qquad \text{et} \qquad m\alpha = \Delta\Omega.$$

On a alors

$$(15') \quad H_n = \frac{2n\rho}{m} J_n(m\alpha t_0) \sin\left(\psi + \frac{n\pi}{2}\right) = 2\rho n\alpha \frac{J_n(t_0 \Delta\Omega)}{t_0 \Delta\Omega} \sin\left(\psi + \frac{n\pi}{2}\right).$$

On vérifie facilement que l'on retrouve ce résultat en faisant le calcul précédent à partir de la formule (7') relative au régime lent.

Dans ce cas si, en outre, m n'est pas trop grand, il peut arriver que $m\alpha t_0$ soit petit devant 1.

On peut alors développer les fonctions de Bessel en série entière et ne garder que le premier terme

$$J_n(a) = \frac{a^n}{2^n n!}.$$

On obtient alors les taux de distorsion sous la forme

$$(16) \quad \begin{cases} H_1 = \rho\alpha t_0 \cos\psi, \\ H_2 = \rho\alpha t_0 \dfrac{m\alpha t_0}{2} \sin\psi, \\ H_3 = \dfrac{\rho\alpha t_0}{2} \left(\dfrac{m\alpha t_0}{2}\right)^2 \cos\psi, \\ H_n = \dfrac{\rho\alpha t_0}{(n-1)!} \left(\dfrac{m\alpha t_0}{2}\right)^{n-1} \sin\left(\psi + n\dfrac{\pi}{2}\right). \end{cases}$$

On voit, sur les relations, que l'on peut choisir l'angle ψ (par exemple la longueur du feeder) pour annuler tous les harmoniques pairs ou impairs, les harmoniques impairs ou pairs étant alors maxima.

Tous les harmoniques de certaines fréquences α telles que $\sin\frac{\alpha t_0}{2} = 0$ sont nuls.

Quand la déviation augmente, la distorsion commence par augmenter, puis diminue et continue ainsi à osciller en décroissant.

Les fonctions J_n ayant un maximum, on peut ainsi avoir très rapidement une forme supérieure de la distorsion, ainsi :

$$H_2 < 2\frac{\rho}{m}, \qquad H_3 < 2{,}6\frac{\rho}{m}.$$

Dans le cas de la modulation de fréquence en régime lent, les formules (15') ou (16) sont valables et, comme $\Delta\Omega$ est indépendant de la fréquence de modulation, la distorsion est proportionnelle à cette fréquence de modulation.

2.2. Distorsion par un quadripôle.

Rappelons que l'on met le temps de transit du quadripôle sous la forme

$$\begin{aligned}\tau = \tau_0 &- \Delta\tau_1 \cos(\omega t_0 - \Psi_1) - \dots \\ &- \Delta\tau_p \cos(p\omega t_0 - \Psi_p) - \dots\end{aligned}$$

et que l'on pose

$$\rho_p = \frac{\Delta\tau_p}{p t_0}, \qquad \psi_p = p\Omega t_0 - \Psi_p.$$

Nous avons déjà considéré une suite de feeders en série équivalente au quadripôle. En reprenant l'origine des temps à l'entrée, on peut réécrire la formule (14) relative à la distorsion par un feeder

$$\begin{aligned}\omega = \Omega &+ m\alpha \cos\alpha\left(t - \frac{t_0}{2}\right) \\ &- 2\rho\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n J_n(a) \sin\left(\psi + \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\alpha\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{t_0}{2}\right).\end{aligned}$$

Le signal sortant du premier feeder équivalent, de longueur $\frac{t_0}{2}$, a donc l'expression

$$\begin{aligned}\omega = \Omega &+ m\alpha \cos\alpha\left(t - \frac{t_0}{2}\right) \\ &- 2\rho_1\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n J_n(a^1) \sin\left(\psi_1 + \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\alpha\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{t_0}{2}\right).\end{aligned}$$

En posant, d'une façon générale,

$$a^p = 2m \sin\frac{p\alpha t_0}{2},$$

le signal ayant traversé le premier, puis le second feeder équivalent, ce dernier de longueur $\frac{2t_0}{2}$, s'écrit

$$\begin{aligned}\omega = \Omega &+ m\alpha \cos\alpha\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2}\right) \\ &- 2\rho_1\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n J_n(a^1) \\ &\quad \times \sin\left(\psi_1 + \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\alpha\left(t - \frac{t_0}{2} - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2}\right) \\ &- 2\rho_2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n J_n(a^2) \\ &\quad \times \sin\left(\psi_2 + \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\alpha\left(t - \frac{2t_0}{2} - \frac{t_0}{2} - \frac{2t_0}{2}\right).\end{aligned}$$

En continuant ainsi et en remplaçant le retard constant de la suite de feeders par celui du quadripôle, on trouve le signal de sortie

$$\begin{aligned}(17) \quad \omega = \Omega &+ m\alpha \cos\alpha(t - \tau_0) \\ &- 2\rho_1\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n J_n(a^1) \\ &\quad \times \sin\left(\psi_1 + \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\alpha\left(t - \tau_0 - \frac{t_0}{2}\right) \\ &- 2\rho_2\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n J_n(a^2) \\ &\quad \times \sin\left(\psi_2 + \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\alpha\left(t - \tau_0 - \frac{2t_0}{2}\right) \\ &- \dots\dots\dots\dots \\ &- 2\rho_p\alpha \sum_{n=0}^{\infty} n J_n(a^p) \\ &\quad \times \sin\left(\psi_p + \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\alpha\left(t - \tau_0 - \frac{pt_0}{2}\right) \\ &- \dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

L'harmonique n contenu dans ce signal a donc pour expression

$$\begin{aligned}&-2n\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p J_n\left(2m \sin\frac{p\alpha t_0}{2}\right) \\ &\quad \times \sin\left(\psi_p + \frac{n\pi}{2}\right) \sin n\alpha\left(t - \tau_0 - \frac{pt_0}{2}\right).\end{aligned}$$

On en déduit le taux de distorsion harmonique en calculant l'amplitude de cet harmonique et en la rapportant à l'amplitude $m\alpha$ du signal principal.

Dans le cas du régime lent, on fera naturellement les mêmes approximations que précédemment.

2.3. Autre méthode de calcul valable en régime lent.

Nous allons exposer maintenant une méthode de calcul de la distorsion, valable en régime lent et qui donne des formules très simples et très répandues

Nous partons de la formule (7)

$$(7) \qquad \omega = \Omega + s'(t) - \tau s''(t),$$

mais, au lieu de développer le temps de transit en série de Fourier, nous allons maintenant le développer en série entière

$$(18) \qquad \tau = \tau_0 + (\omega - \Omega)\tau'_0 + \frac{1}{2}(\omega - \Omega)^2 \tau''_0 + \dots,$$

τ_0, τ'_0, ... étant les valeurs de τ, τ', ... relatives à la porteuse Ω.

On a, en première approximation,

$$\omega - \Omega = s'(t),$$

de sorte que

$$(19)\qquad \omega = \Omega + s'(t) - \tau_0 s''(t) - \tau'_0 s'(t) s''(t) - \frac{\tau''_0}{2} s'^2(t) s''(t) - \ldots.$$

En prenant une modulation sinusoïdale

$$s = m \sin \alpha t,$$

il en résulte aussitôt

$$\omega = \Omega + m\alpha \left[\cos \alpha t + \alpha \tau_0 \sin \alpha t + \frac{m\alpha^2 \tau'_0}{2} \sin 2\alpha t + \frac{m^2 \alpha^3 \tau''_0}{8} \sin 3\alpha t + \ldots \right].$$

On trouve successivement dans cette relation la porteuse, la modulation principale, un terme en quadrature exprimant un retard constant τ_0, puis les distorsions d'ordre 2 et 3. Les taux d'harmoniques 2 et 3 sont donc

$$(20)\qquad \begin{cases} H_2 = \dfrac{1}{2} m\, \alpha^2 \tau'_0, \\ H_3 = \dfrac{1}{8} m^2 \alpha^3 \tau''_0, \end{cases}$$

ces formules étant valables aussi bien en modulation de phase qu'en modulation de fréquence. Remarquons qu'en y remplaçant τ'_0 et τ'' par les valeurs $\rho t_0^2 \sin \psi$ et $\rho t_0^3 \cos \psi$ tirées de (5), on obtient les formules (16) relatives à un quadripôle à temps de transit sinusoïdal en régime lent. On peut faire un calcul plus précis en prenant plus de termes dans la série (18), les taux d'harmoniques étant alors donnés eux-mêmes par des séries. Cependant, cette méthode conduit, en général, à des calculs plus longs que la précédente et n'est, de toutes façons, valable qu'en régime lent.

3. SIFFLEMEMTS PRODUITS PAR PLUSIEURS FRÉQUENCES DE MODULATION.

Supposons maintenant que la modulation renferme un certain nombre q de fréquences sinusoïdales, soit

$$s = m_1 \sin \alpha_1 t + m_2 \sin \alpha_2 t + \ldots + m_q \sin \alpha_q t.$$

On retrouvera, dans le signal distordu, d'une part tous les harmoniques des fréquences α et, d'autre part, des fréquences de sifflement de la forme $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q \alpha_q$, les n_i ayant toutes les valeurs entières possibles, positives et négatives.

Pour simplifier les notations, nous ferons le calcul pour le cas d'un feeder, le passage à un amplificateur se faisant comme précédemment.

L'application de la formule (3′) donne alors

$$\begin{aligned} \omega = \Omega &+ m_1\alpha_1 \cos \alpha_1 t + m_2 \alpha_2 \cos \alpha_2 t + \ldots + m_q \alpha_q \cos \alpha_q t \\ &- \rho \{ m_1 \alpha_1 [\cos \alpha_1 t - \cos \alpha_1 (t - t_0)] + \ldots \\ &+ m_q \alpha_q [\cos \alpha_q t - \cos \alpha_q (t - t_0)] \} \\ &\times \cos \{ m_1 [\sin \alpha_1 t - \sin \alpha_1 (t - t_0)] + \ldots \\ &+ m_q [\sin \alpha_q t - \sin \alpha_q (t - t_0)] + \psi \} \end{aligned}$$

et calculons le dernier facteur X de cette relation

$$\begin{aligned} X = &\left[2\rho m_1 \alpha_1 \sin \alpha_1 \frac{t_0}{2} \sin \alpha_1 \left(t - \frac{t_0}{2} \right) + \ldots + 2\rho m_q \alpha_q \sin \frac{\alpha_q t_0}{2} \sin \alpha_q \left(t - \frac{t_0}{2} \right) \right] \\ &\times \cos \left[2 m_1 \sin \frac{\alpha_1 t_0}{2} \cos \alpha_1 \left(t - \frac{t_0}{2} \right) + \ldots + 2 mq \sin \frac{\alpha_q t_0}{2} \cos \alpha_q \left(t - \frac{t_0}{2} \right) + \psi \right] \end{aligned}$$

et posons, pour simplifier,

$$A_i = 2\rho m_i \alpha_i \sin \frac{\alpha_i t_0}{2} = \rho \alpha_i a_i,$$

$$a_i = 2 m_i \sin \frac{\alpha_i t_0}{2},$$

$$t' = t - \frac{t_0}{2},$$

$$X = [A_1 \sin \alpha_1 t' + \ldots + A_q \sin \alpha_q t'] \times \cos [a_1 \cos \alpha_1 t' + \ldots + a_q \cos \alpha_q t' + \psi].$$

Commençons par calculer l'expression

$$\cos [a_1 \cos \alpha_1 t' + \ldots + a_q \cos \alpha_q t' + \psi].$$

On a, en utilisant la relation

$$J_{-n}(a) = (-1)^n J_n(a),$$

$$\begin{aligned} \cos(a_1 \cos \alpha_1 t' + \psi_1) &= \cos \psi_1 \cos(\alpha_1 \cos \alpha_1 t') - \sin \psi_1 \sin(a \cos \alpha_1 t') \\ &= \cos \psi_1 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (-1)^{n_1} J_{2n_1}(a_1) \cos 2 n_1 \alpha_1 t' \\ &\quad - \sin \psi_1 \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} (-1)^{n_1} J_{2n_1+1}(a_1) \cos(2 n_1 + 1) \alpha_1 t', \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\cos(a_1 \cos \alpha_1 t' + \psi_1) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} J_{n_1}(a_1) \cos \left(\psi_1 + \frac{n_1 \pi}{2} \right) \cos n_1 \alpha_1 t'.$$

Supposons alors que ψ_1 soit de la forme

$$\psi_1 = \psi_2 + a_2 \cos \alpha_2 t'.$$

On a, de même,

$$\cos \left(a_2 \cos \alpha_2 t' + \psi_2 + \frac{n\pi}{2} \right) = \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} J_{n_2}(a_2) \cos \left[\psi_2 + (n_1 + n_2) \frac{\pi}{2} \right] \cos n_2 \alpha_2 t',$$

d'où

$$\cos(a_1\cos\alpha_1 t' + a_2\cos\alpha_2 t' + \psi_2)$$
$$= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} J_{n_1}(a_1)J_{n_2}(a_2)$$
$$\times\cos\left[\psi_2 + (n_1+n_2)\frac{\pi}{2}\right]\cos n_1\alpha_1 t'\cos n_2\alpha_2 t'.$$

Or,

$$\cos n_1\alpha_1 t'\cos n_2\alpha_2 t'$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2)t' + \cos(n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2)t']$$

et les deux expressions

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} J_{n_1}(a_1)J_{n_2}(a_2)$$
$$\times\cos\left[\psi_2 + (n_1+n_2)\frac{\pi}{2}\right]\cos(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2)t',$$
$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} J_{n_1}(a_1)J_{n_2}(a_2)$$
$$\times\cos\left[\psi_2 + (n_1+n_2)\frac{\pi}{2}\right]\cos(n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2)t'$$

contiennent les mêmes termes rangés dans un ordre différent.

On a donc, finalement,

$$\cos(a_1\cos\alpha_1 t' + a_2\cos\alpha_2 t' + \psi_2)$$
$$= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}{}'\sum_{n_2=-\infty}^{\infty} J_{n_1}(a_1)J_{n_2}(a_2)$$
$$\times\cos\left[\psi_2 + (n_1+n_2)\frac{\pi}{2}\right]\cos(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2)t'.$$

En continuant de la même façon, c'est-à-dire en posant

$$\psi_2 = \psi_3 + a_3\cos\alpha_3 t,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi_{q-1} = \psi + a_q\cos\alpha_q t,$$

on trouve

$$\cos(a_1\cos\alpha_1 t' + a_2\cos\alpha_2 t' + \ldots + a_q\cos\alpha_q t' + \psi)$$
$$= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_q=-\infty}^{\infty} J_{n_1}(a_1)J_{n_2}(a_2)\ldots J_{n_q}(a_q)$$
$$\times\cos\left[\psi + (n_1+n_2+\ldots+n_q)\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\times\cos(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q)t'.$$

On a donc

$$X = (A_1\sin\alpha_1 t' + A_2\sin\alpha_2 t' + \ldots + A_q\sin\alpha_q t')$$
$$\times\sum_{-\infty}^{\infty} J_{n_1}(a_1)\ldots J_{n_q}(a_q)$$
$$\times\cos\left[\psi + (n_1+\ldots+n_q)\frac{\pi}{2}\right]\cos(n_1\alpha_1+\ldots+n_q\alpha_q)t'.$$

Cherchons les termes de cette expression, qui sont à la fréquence $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q$. Le facteur $A_1\sin\alpha_1 t'$ en donne deux qui sont :

$$\frac{1}{2}A_1 J_{n_2}(a_2)J_{n_3}(a_3)\ldots J_{n_q}(a_q)\sin(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q)t'$$
$$\times\left\{ J_{n_1-1}(a_1)\cos\left[\psi + (n_1 - 1 + n_2 + \ldots + n_q)\frac{\pi}{2}\right]\right.$$
$$\left. - J_{n_1+1}(a_1)\cos\left[\psi + (n_1 + 1 + n_2 + \ldots + n_q)\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$
$$= \rho n_1\alpha_1 J_{n_1}(a_1)J_{n_2}(a_2)\ldots J_{n_q}(a_q)$$
$$\times\sin\left[\psi + (n_1+n_2+\ldots+n_q)\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\times\sin(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q)t',$$

puisque

$$J_{n_1-1}(a_1) + J_{n_1+1}(a_1) = \frac{2n_1}{a_1}J_{n_1}(a_1) \qquad \text{et} \qquad \frac{A_1}{a_1} = \rho\alpha_1.$$

Chacun des facteurs $A_i\sin\alpha_i t'$ donne une expression identique et le terme de X à la fréquence $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q$ est finalement

$$\rho(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q)J_{n_1}(a_1)J_{n_2}(a_2)\ldots J_{n_q}(a_q)$$
$$\times\sin\left[\psi + (n_1+n_2+\ldots+n_q)\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\times\sin(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q)t'.$$

On obtient X en faisant la somme de tous les termes analogues au précédent obtenus en donnant aux n_i toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$.

On remarque que, dans cette somme, les deux termes correspondant aux valeurs $n_1, n_2, \ldots, n_q$ et $-n_1, -n_2, \ldots, -n_q$ sont égaux. Nous conviendrons, dans la suite, de ne considérer qu'un seul de ces deux groupes de valeurs des n_i pour faire la somme. Ceci introduit un facteur 2 et l'on trouve, finalement, en reportant dans ω,

$$(21)\quad \omega = \Omega$$
$$+ m_1\alpha_1\cos\alpha_1 t + m_2\alpha_2\cos\alpha_2 t + \ldots + m_q\alpha_q\cos\alpha_q t$$
$$-2\rho\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}\sum_{n_2=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{n_q=-\infty}^{\infty}$$
$$\times(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q)$$
$$\times J_{n_1}(a_1)J_{n_2}(a_2)\ldots J_{n_q}(a_q)$$
$$\times\sin\left[\psi + (n_1+n_2+\ldots+n_q)\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\times\sin(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q)\left(t - \frac{t_0}{2}\right).$$

Cette relation généralise la formule (14). Elle est valable en régime rapide pour un feeder ou pour un amplificateur à temps de transit sinusoïdal.

Rappelons que

$$a_i = 2m_i\sin\frac{\alpha_i t_0}{2}.$$

Dans le cas du régime lent, on peut faire les

mêmes approximations que précédemment, c'est-à-dire remplacer a_i par $m_1\alpha_i t_0$ et $J_n(a)$ par $\frac{\alpha^n}{2^n n}$.

Dans le cas de deux fréquences α et β d'indice de modulation m et μ, la formule (21) s'écrit

$$\begin{aligned}\omega = \Omega &+ m\alpha\cos\alpha t + \mu\beta\cos\beta t \\ &+ 2\rho\cos\psi[\ \alpha J_1(a)J_0(b)\sin\ \alpha t' + \ \beta J_0(a)J_1(b)\sin\ \beta t'] \\ &+ 2\rho\sin\psi[2\alpha J_2(a)J_0(b)\sin 2\alpha t' + 2\beta J_0(a)J_2(b)\sin 2\beta t' \\ &\qquad + (\alpha+\beta)J_1(a)J_1(b)\sin(\alpha+\beta)t' + (\alpha-\beta)J_1(a)J_1(b)\sin(\alpha-\beta)t'] \\ &+ 2\rho\cos\psi[3\alpha J_3(a)J_0(b)\sin 3\alpha t' + 3\beta J_0(a)J_3(b)\sin 3\beta t' \\ &\qquad + (\alpha+2\beta)J_1(a)J_2(b)\sin(\alpha+2\beta)t' + (\alpha-2\beta)J_1(a)J_2(b)\sin(\alpha-2\beta)t' \\ &\qquad + (2\alpha+\beta)J_2(a)J_1(b)\sin(2\alpha+\beta)t' + (2\alpha-\beta)J_2(a)J_1(b)\sin(2\alpha-\beta)t'] \\ &- 2\rho\sin\psi[4\alpha J_4(a)J_0(b)\sin 4\alpha t' + \ldots],\end{aligned}$$

où l'on pose

$$a = 2m\sin\frac{\alpha t_0}{2}, \qquad b = 2\mu\sin\frac{\beta t_0}{2}.$$

Supposons que l'on n'utilise qu'une seule fréquence de modulation, les harmoniques auront pour amplitude

$$2\rho n\alpha J_n(a)\sin\left(\psi + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Si l'on ajoute une seconde fréquence β, l'amplitude des harmoniques de la fréquence α devient

$$2\rho n\alpha J_n(a)J_0(b)\sin\left(\psi + \frac{n\pi}{2}\right),$$

qui est plus faible que dans le cas de la modulation par une seule fréquence. On peut même choisir b pour que $J_0(b) = 0$ et l'on ne trouve alors plus aucun harmonique de α dans le signal distordu.

Mais l'addition de la fréquence β a, bien entendu, fait apparaître des fréquences de sifflement $n\alpha + p\beta$ qui n'existaient pas quand la modulation α était seule.

On peut rendre tous ces sifflements nuls en choisissant β tel que

$$\sin\frac{\beta t_0}{2} = 0, \qquad \text{d'où} \qquad b = 0.$$

Mais alors $J_0(b) = 1$ et les harmoniques de la fréquence α sont les mêmes que si l'on ne modulait pas avec la fréquence β.

Plus généralement, on voit de même que, dans le cas où l'on module par de nombreuses fréquences, la distorsion par sifflements est plus importante que la distorsion par harmoniques.

4. DISTORSION D'UN SIGNAL MULTIPLEX.

4.1. Distorsion par un feeder.

Dans le cas où l'on transmet un signal multiplex à courants porteurs, les harmoniques ou les sifflements entre canaux retombent sur d'autres canaux en créant ainsi une diaphonie inintelligible.

Le calcul de cette diaphonie peut se faire en étudiant l'accumulation sur un canal de tous les harmoniques et les sifflements provenant des autres canaux. Ce calcul est très complexe et nous nous contenterons de reproduire les résultats donnés par Lewin (1) dans le cas de la distorsion causée par un feeder mal adapté, en remarquant que l'on peut, par la méthode indiquée plus haut, étendre les formules au cas de la distorsion par un quadripôle quelconque.

Ces calculs sont relatifs au cas du régime lent, c'est-à-dire au cas où $\alpha t_0 < 1$ et où l'harmonique n d'une fréquence pure a pour expression

$$H_n = 2\rho\frac{n}{m}J_n(m\alpha t_0)\sin\left(\psi + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Lewin considère un multiplex à N voies (N assez grand) dont seulement kN réparties au hasard sont chargées par des sinusoïdes, la fréquence (angulaire) du n^o canal étant $n\alpha$. Il suppose, enfin, que l'on utilise la modulation de fréquence et que l'on règle la déviation pour que la valeur efficace du signal multiplex soit constante.

Dans ces conditions, la fréquence instantanée non distordue s'écrit

$$\omega = \Omega + \frac{\Delta\Omega}{\sqrt{kN}}\sum_{n=1}^{N}\varepsilon_n\cos(n\alpha t + \theta_n),$$

ε_n étant égal à 1 ou à 0 selon que le canal est chargé ou non et θ_n étant un angle de phase arbitraire destiné à assurer l'incohérence entre les canaux.

La valeur efficace de ce signal est

$$\sqrt{\frac{\Delta\Omega^2}{kN}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\varepsilon_n^2} = \frac{\Delta\Omega}{\sqrt{2}}.$$

Si l'on assimile ce signal à un bruit de fond, sa valeur de crête sera environ quatre fois plus

(1) L. LEWIN, *Interferences in multi-channelss circuits*, *Wireless Engineer*, 27, déc. 1950, p. 294.

grande que sa valeur efficace. Or, on règlera la déviation du multiplex pour que la déviation de crête donnée par le signal soit la plus grande déviation prévue pour le matériel, soit $\Delta\Omega_{max}$ (la déviation crête à crête étant $2\Delta\Omega_{max}$).

On aura donc

$$4\frac{\Delta\Omega}{\sqrt{2}} = \Delta\Omega_{max},$$

$$\Delta\Omega = \frac{\sqrt{2}}{4}\Delta\Omega_{max}.$$

En d'autres termes, on calculera la distorsion d'un signal multiplex en introduisant, dans les formules qui vont suivre, une déviation inférieure de 9 dB à la déviation maxima prévue pour le matériel.

Précisons enfin que l'on désigne par D la diaphonie sur un canal, c'est-à-dire le rapport entre la valeur efficace de la somme de toutes les fréquences harmoniques ou de sifflement qui tombent sur ce canal et la valeur efficace du signal qui existe (ou qui existerait) sur ce canal.

Cette diaphonie se compose de termes de différents ordres. On appelle distorsion d'ordre n produites par les fréquences $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ l'ensemble des signaux de fréquences $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q$ tels que

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = n.$$

Comme ici $\alpha_i = i\alpha$, il existe un certain nombre de termes de distorsion d'ordre n qui ont exactement la même fréquence. On constate que ces termes sont cohérents entre eux et qu'il faut les ajouter en tenant compte de leur phase. On obtient ainsi les diaphonies d'ordre n, soit D_n.

On constate également que les différents termes de diaphonie de même fréquence, mais d'ordres n différents, sont incohérents entre eux. Il faut donc ajouter leurs valeurs efficaces, de sorte que la diaphonie dans un canal est donnée par

$$D^2 = \sum_{n=2}^{\infty} D_n^2,$$

cette diaphonie étant, bien entendu, fonction du canal considéré et de la déviation du signal.

On peut arriver à mener le calcul jusqu'au bout en considérant la distorsion causée par un feeder mal adapté en régime lent. Comme on ne connaît pas l'angle ψ et pour tenir compte, éventuellement, de l'incohérence entre plusieurs stations-relais successives, on donne à $\sin\left(\psi + \frac{n\pi}{2}\right)$ sa valeur moyenne de 0,7, de sorte que l'on prend pour distorsion d'harmonique n d'une fréquence pure

$$H_n = 1{,}4\rho n\alpha t_0 \frac{J_n(t_0\Delta\Omega)}{t_0\Delta\Omega}.$$

On trouve alors que la diaphonie dans le n^o canal s'écrit

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\sqrt{k}\frac{n\alpha}{\Delta\Omega}F(n, t_0\Delta\Omega).$$

La fonction F est donnée par une intégrale qui ne peut pas être calculée explicitement, mais dont on peut trouver de très bonnes approximations. Sa variation en fonction du rang n du canal est inférieure à 3 dB.

A part cette faible variation, on voit que la

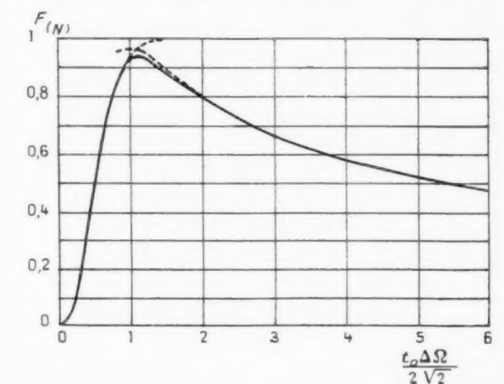


Fig. 4.

diaphonie est proportionnelle au rang du canal, nulle pour le canal inférieur et maxima pour le canal supérieur (ceci en supposant que le premier canal part de la fréquence zéro).

Nous nous intéresserons, dans la suite, à la distorsion dans le canal supérieur ($n = N$) et nous reproduisons, sur la figure 4, la courbe donnée par Lewin représentant la fonction $F(N, t_0\Delta\Omega)$ et en pointillé les deux approximations utilisées pour $t_0\Delta\Omega$ supérieur ou inférieur à $2\sqrt{2}$, soit à peu près 3.

On voit que ces approximations sont très bonnes.

On arrive ainsi aux expressions suivantes de la diaphonie dans le canal supérieur :

Pour de longs feeders : $t_0\Delta\Omega > 3$,

$$D = 1{,}397\rho\sqrt{k}\frac{N\alpha}{\Delta\Omega}\sqrt{\left(1 - \frac{2{,}56}{t_0^2\Delta\Omega^2}\right)\frac{1}{t_0\Delta\Omega}}; \quad (22)$$

Pour des feeders plus courts : $t_0\Delta\Omega < 3$,

$$D = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sqrt{k}\frac{N\alpha}{\Delta\Omega}\sqrt{1 - \left(1 + \frac{t_0^2\Delta\Omega^2}{2}\right)e^{-\frac{t_0^2\Delta\Omega^2}{2}}}; \quad (23)$$

Enfin, pour des feeders très courts ($t_0 \Delta\Omega < 1$), cette formule se simplifie :

$$D = \frac{1}{4} \rho \sqrt{k}\, N \alpha t_0^2 \Delta\Omega, \tag{24}$$

la proportionnalité de la diaphonie à $\Delta\Omega$ indiquant, d'après le développement en série (16), que, seule, intervient, dans ce dernier cas, la distorsion d'ordre 2.

Au contraire, si le feeder est assez long, les distorsions d'ordre élevé sont notables et ne peuvent pas être négligées.

Comme nous l'avions déjà trouvé plus haut, on voit, sur ces formules ou sur la courbe de $F(N, t_0 \Delta\Omega)$, que la diaphonie commence par augmenter avec la déviation de fréquence, puis se met à diminuer quand la déviation continue à croître.

4.2. Distorsion par un quadripôle quelconque.

Nous opérerons comme aux paragraphes 1.2 et 2.2, c'est-à-dire que nous décomposerons le temps de transit du quadripôle en série de Fourier sous la forme (8).

Si l'on applique au quadripôle q fréquences α_1, α_2, ..., α_q, le terme de distorsion de fréquence $n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q$ aura pour expression :

$$\begin{aligned} & -2(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q) \\ & \times \sum_{p=1}^{\infty} \rho_p J_{n_1}(a_1^p) J_{n_2}(a_2^p) \ldots J_{n_q}(a_q^p) \\ & \times \sin\left[\psi + (n_1 + n_2 + \ldots + n_q)\frac{\pi}{2}\right] \\ & \times \sin(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q)\left(t - p\frac{t_0}{2}\right) \end{aligned}$$

en posant

$$a_i^p = 2m \sin \frac{p\alpha_i t_0}{2}.$$

Comme nous avons supposé ici que nous étions en régime lent, nous pouvons négliger les déphasages $(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \ldots + n_q\alpha_q)\frac{pt_0}{2}$ et ajouter arithmétiquement les amplitudes des distorsions correspondantes provenant des différents termes de la série de Fourier.

Il en résulte que les diaphonies D_n relatives aux différents termes de la série de Fourier vont également s'ajouter arithmétiquement et il en sera donc de même des diaphonies globales D.

En résumé, la marche du calcul est la suivante :

On décompose en série de Fourier le temps de transit du quadripôle, ce qui revient à le considérer comme constitué d'un certain nombre de feeders en série, chacun caractérisé par un coefficient de réflexion $\rho_p = \frac{\Delta\tau_p}{pt_0}$ et un temps de parcours $\frac{pt_0}{2}$. On calcule par l'une des formules du paragraphe 4.1 la diaphonie donnée par chacun de ces feeders et leur somme est la diaphonie donnée par le quadripôle en question.

On a ainsi un moyen simple de calculer la diaphonie dans un multiplex. Répétons toutefois que ce calcul n'est valable qu'en régime lent et quand les angles ψ ont la valeur moyenne de 45°. Cette méthode est assez approximative et contient même une contradiction interne; en effet, la valeur de l'un des angles ψ détermine celle des autres. Il est toutefois difficile d'en tenir compte, sauf dans le cas où l'on utilise la formule (24) et où n'intervient que la distorsion du 2e ordre.

5. APPLICATION A L'ÉTUDE ET AUX ESSAIS DES MULTIPLEX.

L'ingénieur qui fabrique un multiplex à courants porteurs à modulation de fréquence doit résoudre deux problèmes opposés. Lors de la conception du matériel, il doit déterminer de combien la courbe de temps de transit d'une station peut s'éloigner d'une droite pour satisfaire à la qualité demandée et prévoir des mesures simples pour les essais. Lors de la mise au point, il doit vérifier que le matériel construit est conforme à son projet et déduire de ses mesures la diaphonie que l'on aura en service.

Pour faire le projet, il faut d'abord répartir la diaphonie tolérable entre les différents éléments de la station. Nous ne considérerons ici que celle due aux amplificateurs et aux feeders et nous supposerons que l'on se trouve en régime lent, ce qui est, en général, le cas.

La longueur des feeders étant imposée par d'autres considérations, on utilisera les formules du paragraphe 4.1 pour déterminer la précision avec laquelle ils doivent être adaptés.

Le calcul de la distorsion introduite par les amplificateurs se fera également par la méthode des paragraphes 4.1 ou 4.2. En général, il sera nécessaire de tâtonner un peu pour obtenir une courbe de temps de transit satisfaisante.

Dans tous ces calculs, il sera prudent de prendre systématiquement $\sin\psi$ et $\cos\psi$ égaux au moins à 0,7, ceci pour tenir compte des déréglages éventuels du matériel.

Ayant ainsi déterminé les courbes de temps de

transit des différents éléments d'une station, on peut calculer, au moyen des formules des paragraphes 2 ou 3, l'amplitude de la distorsion ou des sifflements que produira chacun de ces éléments sur une modulation par une ou plusieurs fréquences pures. Pour tenir compte de l'incohérence de phase entre les différentes stations successives, on calculera la distorsion d'une station en ajoutant quadratiquement les distorsions ainsi obtenues. Ceci définit les essais à faire subir au matériel au moyen d'une ou de plusieurs fréquences pures.

Lors de la mise au point, on fera les mesures ainsi prévues, mais celles-ci n'auront de sens que si la courbe de temps de transit obtenue n'est pas franchement différente de la courbe théorique. Il est indispensable de s'en assurer par une mesure directe du temps de transit.

Ayant mesuré la courbe réelle du matériel construit, on pourra alors, soit conclure que les essais par fréquences pures ont effectivement un sens, soit déterminer directement la diaphonie par la méthode du paragraphe 4.2.

On se servira également de la courbe de temps de transit mesurée pour calculer la distorsion sur les fréquences pures et la différence avec les valeurs mesurées fournira la distorsion due au modulateur, au discriminateur et aux défauts de limitation.

Pour terminer, nous allons indiquer une méthode approximative, mais rapide, pour déterminer la diaphonie sans avoir à mesurer le temps de transit du matériel. Cette méthode ne s'applique qu'au cas où la distorsion est due principalement au temps de transit.

Nous supposerons que la courbe de temps de transit est une sinusoïde et nous modulerons le matériel par une fréquence pure α de déviation connue $\Delta_1\Omega$. On mesure les distorsions d'harmoniques 2 et 3 qui sont respectivement

$$H_2 = 4\rho\alpha t_0 \frac{J_2(t_0\Delta_1\Omega)}{t_0\Delta_1\Omega}\sin\psi,$$

$$H_3 = 6\rho\alpha t_0 \frac{J_3(t_0\Delta_1\Omega)}{t_0\Delta_1\Omega}\cos\psi.$$

Sans toucher à cette modulation, on ajoute une modulation par une deuxième fréquence β de déviation connue $\Delta_2\Omega$. Les distorsions d'harmoniques 2 et 3 de la fréquence α deviennent

$$H_2 = 4\rho\alpha t_0 \frac{J_2(t_0\Delta_1\Omega)}{t_0\Delta_1\Omega}J_0(t_0\Delta_2\Omega)\sin\psi,$$

$$H_3 = 6\rho\alpha t_0 \frac{J_3(t_0\Delta_1\Omega)}{t_0\Delta_1\Omega}J_0(t_0\Delta_2\Omega)\cos\psi.$$

La comparaison avec les valeurs précédentes donne $J_0(t_0\Delta_2\Omega)$, d'où l'on tire t_0.

En reportant t_0 dans les valeurs de H_2 et H_3, on obtient celles de $\rho\sin\psi$ et $\rho\cos\psi$, d'où l'on tire ρ.

On peut alors calculer la diaphonie par les formules du paragraphe 4.1.

Lewin, dans l'article cité, expose une méthode d'essai plus exacte que cette méthode approximative, mais exigeant des mesures et des calculs beaucoup plus compliqués. La meilleure méthode pour régler et faire l'essai d'un multiplex est de beaucoup la mesure directe de son temps de transit.

6. EXEMPLES NUMÉRIQUES.

6.1. Distorsion par un feeder.

Pour appliquer les calculs précédents, prenons comme exemple un feeder de 200 m $\left(t_0 = \frac{3}{4}.10^{-6}\text{ s}\right)$ adapté de telle façon que $\rho = 10^{-3}$. Supposons que l'on veuille transmettre un signal multiplex à 60 voies pour lequel on aura environ $\alpha = 2.10^6$ dans le canal le plus élevé et $\Delta\Omega = 6.10^6$ et cherchons la distorsion introduite sur une fréquence pure de pulsation 2.10^6 transmise avec une déviation angulaire de 6.10^6. Nous supposerons $\sin\psi$ et $\cos\psi$ égaux à 1, ce qui donnera une limite supérieure de la distorsion.

On se trouve ici en régime rapide $\left(\frac{\alpha t_0}{2} = \frac{3}{4}\right)$ et il est nécessaire d'appliquer les formules exactes (15) qui donnent des distorsions d'ordre 2 et 3 égales à

$$H_2 = 71\text{ db},\qquad H_3 = 71\text{ db}.$$

Si, dans ces formules, on avait fait l'approximation du régime lent en remplaçant $2m\sin\frac{\alpha t_0}{2}$ par $t_0\Delta\Omega$, on aurait trouvé des valeurs assez différentes

$$H_2 = 76,5\text{ db},\qquad H_3 = 64,7\text{ db}.$$

Si, enfin, on avait utilisé les formules (16) ou les formules équivalentes (20), on aurait obtenu une très mauvaise approximation, à savoir :

$$H_2 = 39,5\text{ db},\qquad H_3 = 43\text{ db}.$$

Les chiffres que nous venons de trouver sont également relatifs à la distorsion dans un amplificateur dont la courbe sinusoïdale de temps de transit présenterait un maximum tous les 750 kc/s et dont la variation totale de temps de transit serait $2\rho t_0 = 2,66.10^{-9}$s. Une telle courbe serait assez bien réalisée avec un amplificateur à circuits décalés convenablement réglé.

6.2. Distorsion par un quadripôle.

Nous allons maintenant calculer la distorsion introduite par un simple circuit bouchon constitué par une self, une capacité et une résistance en série.

Si B est la bande passante à 3 dB du circuit, son temps de transit est donné par

$$\tau = \frac{1}{\pi B} \frac{1}{1 + 4 \frac{\delta F}{B}},$$

où

$$\delta F = \frac{\omega - \Omega}{2\pi}.$$

Nous supposerons une modulation par une seule fréquence sinusoïdale α, de déviation $\Delta\Omega$ et nous prendrons comme premier paramètre $m = \frac{\Delta\Omega}{\alpha}$.

Nous définirons, d'autre part, le circuit par le rapport entre sa largeur de bande et la déviation crête à crête, soit par le paramètre

$$p = \frac{2\pi B}{2\Delta\Omega} = \frac{B}{2\Delta F}.$$

Les calculs ont été menés pour les valeurs des paramètres $m = 2$, $m = 4$, $p = 2$, $p = 1,5$ par les différentes méthodes précédentes.

a. On a d'abord utilisé la méthode rigoureuse du paragraphe 1.4, qui tient compte de l'atténuation des bandes latérales. Les calculs ont été effectués à l'Institut Henri Poincaré avec une grande précision. Ces résultats peuvent donc servir de référence pour contrôler les autres méthodes de calcul.

b. On a ensuite utilisé la formule (17) du paragraphe 2.2. On a utilisé pour représenter la courbe de temps de transit une décomposition en série de Fourier limitée à six termes, l'intervalle fondamental étant défini par $t_0 B = \frac{1}{2}$. Cette décomposition était amplement suffisante pour le calcul des harmoniques 3, mais il aurait mieux valu prendre huit termes pour celui des harmoniques 5.

c. On a ensuite représenté la courbe de temps de transit par une série entière selon la méthode du paragraphe 2.3, la distorsion étant alors calculée par la formule (20) et une formule identique pour l'harmonique 5.

Ces formules s'écrivent, avec les paramètres réduits utilisés :

$$H_3 = \frac{2}{m}\left(\frac{1}{2p}\right)^3,$$

$$H_5 = \frac{2}{m}\left(\frac{1}{2p}\right)^5.$$

d. On a alors calculé, par la formule (24) du paragraphe 4.1, la diaphonie introduite dans le canal supérieur d'un signal multiplex s'étendant de 0 à α. La déviation de crête de ce signal a été prise égale à la déviation de crête du signal sinusoïdal considéré précédemment, c'est-à-dire que l'on a introduit, dans le calcul, une déviation

$$\Delta'\Omega = \frac{\Delta\Omega}{2\sqrt{2}}.$$

Pour le facteur de charge du multiplex, on a supposé $k = \frac{1}{4}$.

On a ainsi trouvé les distorsions suivantes, comptées en millièmes du signal sinusoïdal dans les cas *a*, *b*, *c* ou du signal dans le canal le plus élevé dans le cas *d*.

Harmonique 3 °/₀₀.

		a.	*b*.	*c*.
$p = 1,5$	$m = 4$	12,71	14,2	18,5
$p = 1,5$	$m = 8$	6,71	7,35	9,3
$p = 2$	$m = 4$	6,18	6,66	7,8
$p = 2$	$m = 8$	3,21	3,41	3,9

Harmonique 5 °/₀₀.

		a.	*b*.	*c*.
$p = 1,5$	$m = 4$	1,170	0,93	2,06
$p = 1,5$	$m = 8$	0,635	0,55	1,03
$p = 2$	$m = 4$	0,338	0,384	0,488
$p = 2$	$m = 8$	0,182	0,193	0,243

Diaphonie °/₀₀.

$p = 1,5$	$m = 4$	5,94
$p = 1,5$	$m = 8$	2,98
$p = 2$	$m = 4$	3,35
$p = 2$	$m = 8$	1,67

Ces résultats appellent quelques remarques.

Tout d'abord, on constate que le choix du temps t est ici nécessairement tel que l'on se trouve dans le cas du régime lent, ce qui explique le succès des calculs *b* et *c*.

La supériorité du calcul *b* vient, ici, de ce que la décomposition en série de Fourier représente mieux la courbe réelle que la décomposition en série entière utilisée. On pourrait, dans le cas du régime lent, réaliser une décomposition en série entière plus longue et obtenir de meilleurs résultats par la méthode *c*.

Il a fallu prendre six termes de la série de Fourier, parce que la courbe de temps de transit était, ici, parabolique. On s'arrange plutôt, en général, pour prendre une courbe à plusieurs maxima et il suffit alors de un ou deux termes d'une série de Fourier

pour obtenir une très bonne représentation, tandis qu'il faudrait une série entière très longue. De plus on se trouve en régime rapide. Le calcul *b* est alors bien supérieur au calcul *c*.

Il est normal que la méthode exacte *a* conduise à une distorsion inférieure à celle calculée par les autres méthodes, puisque les bandes latérales des harmoniques, étant plus éloignées de la porteuse que celles du signal, sont également plus atténuées. Il en résulte une diminution de la déviation relative aux harmoniques.

Le fait de trouver un résultat opposé dans le calcul de l'harmonique 5 par la méthode *b* provient, comme nous l'avons déjà indiqué, de ce que l'on n'a pas pris assez de termes dans la série de Fourier.

Dans les calculs *a*, *b*, *c*, nous avons supposé le circuit accordé sur la porteuse, il en résulte que tous les harmoniques pairs sont nuls. Au contraire, dans le calcul *d*, nous avons pris tous les angles ψ égaux à 45°. Comme nous nous trouvons dans le cas d'application de la formule (24), la diaphonie calculée provient essentiellement de la distorsion du 2e ordre.

Malgré cela, cette diaphonie est notablement inférieure aux distorsions harmoniques calculées en *a*, *b* et *c*. Ceci provient, d'une part d'une réduction de la valeur efficace du signal et, d'autre part, d'un certain effet statistique, la distorsion du signal multiplex étant étalée sur une grande bande de fréquences.

Pour terminer, je tiens à remercier vivement M. Chireix, Ingénieur en Chef, pour les nombreuses idées qu'il m'a apportées, soit dans ses études antérieures de la question, soit au cours des nombreux échanges de vues que nous avons eus ensemble. Je dois également remercier M. Jessel, qui s'est chargé des calculs numériques.

EFFET DU BRUIT DE FOND SUR LA FRÉQUENCE DES AUTO-OSCILLATEURS A LAMPES. PRÉCISION ULTIME DES HORLOGES RADIOÉLECTRIQUES (1).

Par M. Augustin BLAQUIÈRE.

Sommaire. — *Cet article traite de l'effet du bruit de fond sur le régime, et plus particulièrement sur la fréquence des auto-oscillateurs à lampes stabilisés en amplitude. Après un bref rappel des méthodes classiques de l'analyse des bruits utilisées pour les systèmes physiques régis par des équations linéaires, l'auteur montre que ces méthodes sont inutilisables quand les systèmes sont régis par des lois non linéaires. Les auto-oscillateurs à lampes se plaçant dans cette dernière catégorie, il est nécessaire de modifier les résultats valables pour les systèmes linéaires et de les adapter.*

L'auteur a adapté à ce cas la méthode de Rice et envisage d'abord l'effet d'une impulsion électronique isolée dont l'action peut être décomposée en une perturbation d'amplitude et en un petit déphasage. L'auteur construit ensuite la perturbation totale apportée par le spectre de bruit complet à partir de ces perturbations élémentaires et il exprime la modification qu'elles imposent à l'oscillation idéale.

Les méthodes utilisées sont applicables également à des oscillateurs basés sur des principes différents de ceux des horloges à quartz tels que les oscillateurs klystrons, par exemple.

(C. D. U. 621.396.615.)

Summary. — *This article deals with the effect of back-ground noise on the working and more particularly on the frequency of tube-type self-oscillators, amplitude stabilized. After briefly recalling the classical methods of noise analysis which are made use of for linear physical systems, the author shows that these methods cannot be employed for non-linear system. Self-oscillators driven by tubes being of this latter category, the results applicable to linear systems have to be modified and adapted.*

For this case the author has adapted Rice's method and first considers the effect of an isolated electronic impulse whose action can be decomposed into an amplitude perturbation and a small phase-shift. The author then builds up the total disturbance caused by the complete noise spectrum as from these elementary disturbances and he expresses the modification which they impose on the ideal oscillation.

The methods employed are equally applicable to oscillators founded on different principles from those for quartz-controlled clocks, such as klystron oscillators, for instance.

(U. D. C. 621.396.615.)

INTRODUCTION.

Un auto-oscillateur stabilisé en amplitude ne suit jamais une loi rigoureusement sinusoïdale. L'effet de la courbure des caractéristiques introduit de la distorsion, et mène en première approximation à représenter son oscillation par la superposition d'un fondamental et de nombreux harmoniques.

Une altération plus grave est introduite par des perturbations aléatoires de natures diverses, qui

---

(1) Cette étude a été faite sous la direction du Professeur P. Grivet, qui m'en a proposé le sujet. Je suis heureux de lui exprimer ici ma profonde gratitude pour m'avoir aidé de ses conseils, et guidé dans ce travail.

prennent naissance en certaines régions du système. Elle détruit la périodicité du signal en entraînant des fluctuations très irrégulières de son amplitude et de sa fréquence.

Les sources de fluctuations sont multiples :

Elles peuvent être de nature macroscopique et grossière, c'est le cas des variations de température des éléments du circuit, des chocs mécaniques, de la mauvaise suspension des quartz dans leurs supports, etc.

Elles peuvent aussi être de nature microscopique, c'est-à-dire avoir une origine atomique, moléculaire ou électronique.

Deux effets importants de ce type sont :

Les différences de potentiel qui prennent naissance entre les extrémités des résistances, par suite des fluctuations en densité du gaz d'électrons qu'elles contiennent (bruit d'agitation thermique dans les résistances);

L'émission irrégulière des cathodes des lampes radioélectriques (effet de grenaille).

Ces deux dernières causes seront seules envisagées ici, et le but de l'étude sera de savoir si elles suffisent à expliquer les irrégularités qui subsistent dans les montages très soignés, où toutes les précautions sont prises pour éliminer les autres actions extérieures.

La principale difficulté du problème provient de l'impossibilité où l'on se trouve de lui appliquer les méthodes classiques de l'analyse des bruits.

Ces méthodes, couramment employées pour déterminer les perturbations de régime apportées par les bruits aux systèmes physiques régis par des équations linéaires, sont inutilisables, sous leur forme traditionnelle, quand les sytèmes sont régis par des lois non linéaires.

C'est dans cette deuxième catégorie que se placent les auto-oscillateurs fonctionnant au voisinage du régime stable, dont on examinera le comportement.

On sera donc amené à modifier les résultats valables pour les systèmes linéaires, et à les adapter à ces oscillateurs.

La première partie, rassemblera les éléments de l'étude, en insistant sur les représentations très diverses des impulsions originelles. Le choix d'une bonne représentation simplifiera, en effet, considérablement le passage du cas linéaire au cas non linéaire.

La deuxième partie sera consacrée à l'effet du bruit de fond sur le régime des auto-oscillateurs non linéaires et, plus particulièrement, sur leur fréquence.

Une conséquence en sera l'évaluation de la limite de l'erreur commise sur la mesure du temps quand l'oscillateur est utilisé comme horloge radioélectrique.

Cependant, les perturbations de fréquence et d'amplitude sont si étroitement liées qu'il est impossible de les traiter de façon absolument distincte. On sera donc conduit à examiner aussi les fluctuations de l'amplitude dont il est également intéressant de connaître les lois : ce phénomène joue un rôle important dans les télécommunications (modulation de fréquence par événement) et en physique, entre autres dans la détection de la résonance magnétique nucléaire.

I. PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES ET STATISTIQUES DU BRUIT DE FOND (RAPPEL).

1. Propriétés élémentaires, « structure » du bruit de fond.

A. Les impulsions originelles. — *a. Fonction impulsive.* — Les chocs élémentaires produits par une source de bruit peuvent être commodément représentés au moyen de fonctions impulsives dont le type est la fonction $\delta(t)$ de Dirac.

Rappelons les propriétés qui servent à définir cette fonction :

1° Elle est nulle pour toute valeur de t extérieure à un intervalle Δt infiniment court entourant l'origine des temps;

2° L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t$ a une valeur finie (valeur posée égale à 1); il s'en suit que $\delta(t)$, nul pour toute valeur de t différente de zéro, est infini pour $t = 0$.

Empruntons un exemple à la mécanique. La fonction impulsive est alors une force $F(t)$ appliquée pendant un instant très court à un point matériel (on la supposera nulle en dehors de ce laps de temps); elle entraîne une variation brutale de la quantité de mouvement du point solide.

Il faut que, pendant cette durée extrêmement courte, la force en action devienne extrêmement grande pour que la vitesse du point matériel varie d'une façon sensible.

L'intégrale de Dirac $q = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)\,\mathrm{d}t$ a ici un sens physique simple, elle mesure la variation de la quantité de mouvement du point matériel considéré. On l'appelle « percussion ».

Un autre exemple, analogue, est celui où l'on applique entre deux bornes d'un réseau conducteur

une force électromotrice $E(t)$ pendant un temps très court. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} E(t)dt$ sera appelée dans ce cas « échelon » (²) de la fonction $E(t)$, le terme « percussion » étant surtout réservé à une action mécanique.

Dans le cas général, l'impulsion est produite à un instant t_j quelconque (différent de zéro), et son échelon q est différent de 1 ; nous la désignerons alors par $G(t-t_j)$.

Cette fonction $G(t-t_j)$ se déduit de la fonction normalisée $\delta(t)$ par translation dans le temps et multiplication par q.

En pratique, les impulsions réelles ont une durée très courte, mais non nulle. Les forces ou les tensions mises en jeu prennent des valeurs très grandes, mais

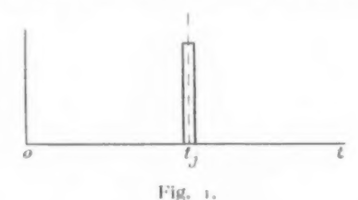


Fig. 1.

finies. La fonction impulsive dont nous venons de rappeler la définition mathématique apparaît donc comme une limite théorique commode.

L'image la plus simple que l'on puisse donner de l'impulsion réelle est celle d'un créneau (*fig.* 1) de faible largeur et de grande hauteur.

L'échelon de cette impulsion est alors la surface du créneau.

b. Développement de Fourier de la fonction impulsive $G(t-t_j)$. — Les impulsions naturelles produites par la source de bruit n'ont, bien entendu, aucun caractère sinusoïdal. Il est possible cependant d'introduire une périodicité fictive en imaginant qu'une impulsion donnée se reproduira au bout de temps T, $2T$, $3T$, ...

Toutes les fois que cette impulsion, à répétition périodique, agira sur un système son action sera la même que celle de l'impulsion unique donnée, à la condition que T soit assez grand pour que le système n'ait pas gardé la mémoire du choc antérieur.

On a ainsi le droit d'assimiler l'action d'une impulsion naturelle unique à celle d'une impulsion de la suite de période T, et il est alors possible de trouver des développements de Fourier introduisant des composantes sinusoïdales réparties sur toute la gamme des fréquences.

Nous donnons ci-dessous, sans justification, un tel développement pour la fonction impulsive $G(t-t_j)$ d'échelon q, avec un intervalle de répétition $0, T$:

$$(\text{I.1}) \qquad G(t-t_j) = \frac{q}{T} + \frac{2q}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi n(t-t_j)}{T}.$$

Les harmoniques successifs de ce développement ont des fréquences qui diffèrent de la quantité constante $\Delta\nu = \frac{1}{T}$ (pour l'intervalle $0, T$ choisi).

Désignons par ν_n la fréquence du $n^{\text{ième}}$ harmonique, nous pourrons écrire :

$$(\text{I.2}) \qquad G(t-t_j) = q\,\Delta\nu + 2q\,\Delta\nu\sum_{n=1}^{\infty}\cos 2\pi\nu_n(t-t_j),$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \qquad \Delta\nu = \frac{1}{T}.$$

Si l'on autorise les fréquences négatives, on voit facilement que cette expression se réduit à la forme plus simple, où le terme constant ne se distingue plus des autres :

$$(\text{I.3}) \qquad G(t-t_j) = q\,\Delta\nu\sum_{-\infty}^{+\infty}\cos 2\pi\nu_n(t-t_j).$$

Nous mentionnerons enfin une dernière forme commode sous laquelle peut être mis ce développement, si l'on remarque que l'on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sin 2\pi\nu_n(t-t_j) = 0$$

(les termes de fréquences opposées s'annulant deux à deux).

On joindra à la série (I.3) une deuxième série de ce type, ce qui donne

$$(\text{I.4}) \qquad \begin{aligned} G(t-t_j) &= q\,\Delta\nu\sum_{-\infty}^{+\infty}\cos 2\pi\nu_n(t-t_j) \\ &\quad + q\,\Delta\nu\sum_{-\infty}^{+\infty} j\sin 2\pi\nu_n(t-t_j) \\ &= q\,\Delta\nu\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu_n(t-t_j)}. \end{aligned}$$

Si l'on fait tendre T vers l'infini, on voit que les différences finies $\Delta\nu$ deviennent des différentielles $d\nu$. Les sommations doivent alors être remplacées par

(²) On a choisi cette appellation, car la représentation graphique de la fonction $\int_{-\infty}^{t} E(t)\,dt$, primitive de la fonction impulsive $E(t)$, a la forme d'un échelon ou d'une marche d'escalier de hauteur q.

des intégrations, et l'on passe naturellement d'une suite discrète de fonctions trigonométriques à une suite continue.

Ce passage à la limite est nécessaire lorsque la mémoire du système sur lequel agit le choc ne s'annule jamais complètement, par exemple lorsqu'elle décroît asymptotiquement avec le temps

c. Spectre d'amplitude d'une impulsion, impulsion réduite, impulsion filtrée. — Reprenant la série trigonométrique

$$G(t-t_j) = q\,\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu_n(t-t_j),$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \qquad \Delta\nu = \frac{1}{T},$$

nous voyons que le spectre, obtenu en portant en abscisse la fréquence de chaque harmonique et en ordonnée l'amplitude correspondante, est formé d'une succession de raies de même longueur $q\Delta\nu$, distantes de $\Delta\nu$.

Si l'intervalle de répétition T tend vers l'infini, $\Delta\nu$ et $q\Delta\nu$ tendent vers zéro. Le spectre vient se confondre avec l'axe des abscisses, mais si nous portons en ordonnée q au lieu de $q\Delta\nu$, les raies gardent une longueur constante et le spectre de raies se transforme, à la limite, en un spectre continu.

Le spectre d'amplitude d'une impulsion, ainsi défini, a donc la forme très simple représentée sur la figure 2, c'est une bande indéfinie de hauteur q.

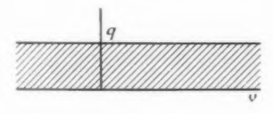


Fig. 2.

Supposons que l'impulsion traverse un filtre :

Nous supposerons que la bande des fréquences comprises entre deux valeurs limites ν_1 et ν_2 ne subit aucune modification d'amplitude et de phase, tandis que les autres fréquences sont arrêtées.

Le spectre de l'impulsion transmise est donc réduit à la bande rectangulaire représentée sur la figure 3. L'impulsion transmise est une nouvelle fonction du temps bien connue dont l'enveloppe est représentée sur la figure 4.

Une impulsion, ainsi déduite du choc initial *par simple découpage de sa bande spectrale* sera appelée « impulsion réduite ». L'influence d'un filtre sera généralement plus compliquée : il modifiera à la fois l'amplitude et la phase des diverses composantes spectrales admises à l'entrée.

Tenant compte de ce que les harmoniques de l'impulsion initiale situés nettement en dehors de la bande passante ne jouent aucun rôle, on voit que l'on pourra toujours déterminer la « réponse » en remplaçant cette impulsion initiale par une « impulsion réduite ».

La largeur du spectre de l'impulsion réduite

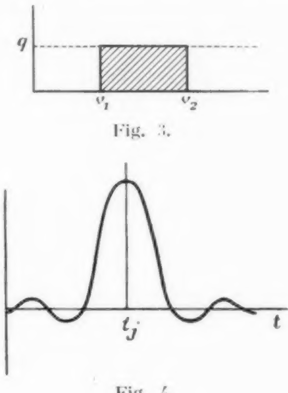


Fig. 4.

d'entrée devra être évidemment du même ordre que la largeur de bande du système pendulaire considéré.

Cette remarque nous servira par la suite, car nous aurons affaire à des systèmes sélectifs du type pendulaire amorti, dont nous déterminerons la réponse en remplaçant l'impulsion initiale par une « impulsion initiale réduite ».

d. Impulsion paire, impulsion impaire. — Suivant une méthode préconisée par Rice, il est commode, pour caractériser l'effet d'un choc sur un système pendulaire, de décomposer ce choc en deux parties que nous appellerons « impulsion paire » et « impulsion impaire ».

L'impulsion paire et l'impulsion impaire sont deux oscillations en quadrature (la première du type cos, la deuxième du type sin), modulées par des fonctions $X(t)$ et $Y(t)$ lentement variables du type « impulsion réduite ».

Cette dernière propriété provient de ce que le système sur lequel agit le choc a une faible largeur de bande, et l'on peut par suite remplacer l'impulsion donnée par un choc réduit. Plus cette largeur est faible, plus $X(t)$ et $Y(t)$ varient lentement avec le temps.

Il est facile d'obtenir les deux composantes, paire et impaire, du choc en groupant convenablement les termes de son développement de Fourier.

Soit ν_0 la fréquence centrale de la bande spectrale rectangulaire qui caractérise l'impulsion réduite d'attaque, cette bande s'étendant de la fréquence ν_1 à la fréquence ν_2.

Le développement de Fourier correspondant sera :

$$G(t-t_j) = q\,\Delta\nu \sum_{\nu_1}^{\nu_2} \cos 2\pi\nu_n (t-t_j),$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T}, \qquad \Delta\nu = \frac{1}{T}, \qquad T \to \infty.$$

Il est facile de voir que l'on a, en mettant en évidence les termes dont les fréquences sont symétriques par rapport à ν_0,

$$G(t-t_j) = q\,\Delta\nu \sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} [\cos 2\pi(\nu_0-\nu)(t-t_j) + \cos 2\pi(\nu_0+\nu)(t-t_j)],$$

ce que l'on peut écrire sous la forme

$$G(t-t_j) = 2q\,\Delta\nu \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t-t_j)\right] \times \cos 2\pi\nu_0(t-t_j)$$

ou, en développant le facteur $\cos 2\pi\nu_0(t-t_j)$.

$$\begin{aligned} G(t-t_j) = {} & 2q\,\Delta\nu \cos 2\pi\nu_0 t_j \times \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t-t_j)\right] \cos 2\pi\nu_0 t \\ & + 2q\,\Delta\nu \sin 2\pi\nu_0 t_j \times \left[\sum_{\nu=0}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t-t_j)\right] \sin 2\pi\nu_0 t. \end{aligned}$$

Le résultat final sera plus facile à interpréter si nous changeons les limites des sommations qui figurent dans l'expression ci-dessus. Il vient alors :

$$\begin{aligned} G(t-t_j) = {} & q\,\Delta\nu \cos 2\pi\nu_0 t_j \times \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t-t_j)\right] \cos 2\pi\nu_0 t \\ & - q\,\Delta\nu \sin 2\pi\nu_0 t_j \times \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t-t_j)\right] \sin 2\pi\nu_0 t. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant poser :

$$X(t) = q\,\Delta\nu \cos 2\pi\nu_0 t_j \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t-t_j)\right],$$

$$Y(t) = q\,\Delta\nu \sin 2\pi\nu_0 t_j \left[\sum_{\nu=-(\nu_0-\nu_1)}^{\nu=\nu_0-\nu_1} \cos 2\pi\nu(t-t_j)\right].$$

Ces deux fonctions représentent bien des chocs réduits au temps t_j, comme nous l'avions annoncé plus haut; elles varient donc d'autant plus lentement que leur bande spectrale est plus courte.

1° La bande spectrale de chacun de ces chocs réduits composants a pour largeur $2(\nu_0-\nu_1)$. C'est précisément la largeur de la bande du choc réduit résultant, initialement donné.

2° La bande spectrale de chacun des chocs réduits composants admet pour fréquence centrale $\nu = 0$. Les courbes représentant $X(t)$ et $Y(t)$ sont classiques.

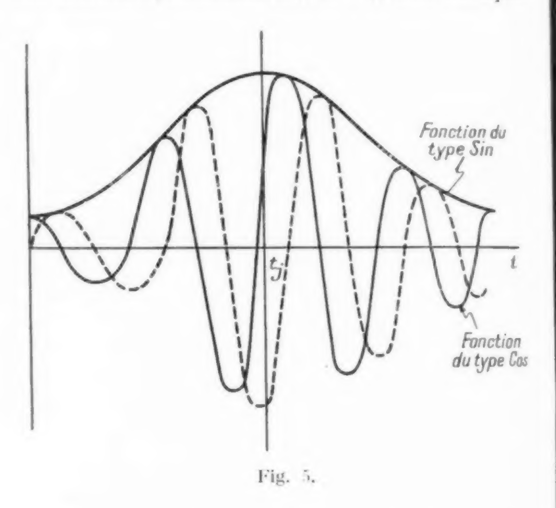


Fig. 5.

On peut généralement leur substituer des « courbes en cloche » du type de Gauss (*fig.* 5).

3° Si l'on appelle échelons de ces chocs réduits les échelons qu'auraient les chocs correspondants non réduits (obtenus en étendant les sommations ci-dessus de $-\infty$ à $+\infty$), on voit que $X(t)$ et $Y(t)$ ont pour échelons respectifs $q \cos 2\pi\nu_0 t_j$ et $q \sin 2\pi\nu_0 t_j$ tandis que le choc réduit résultant a pour échelon q.

B. La « réponse » d'un système linéaire a un choc. — On appelle « système linéaire » tout système physique dont l'évolution peut être décrite au moyen d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. C'est le cas du pendule grave tant que son amplitude est faible, du circuit oscillant classique à self, capacité, résistance, etc.

L'étude des systèmes linéaires est bien connue. Il est cependant utile de résumer ici quelques-unes de leurs propriétés afin d'en tirer des méthodes qui permettront d'aborder le cas de systèmes à loi non linéaire.

Nous nous intéresserons d'abord au mouvement provoqué par une impulsion. Il sera ensuite simple

de déterminer l'action d'impulsions en nombre quelconque engendrées par une source de bruit.

a. Étude directe de l'excitation par un choc. — Considérons pour fixer les idées le circuit oscillant à self, capacité, résistance série (L, C, r) de la figure 6.

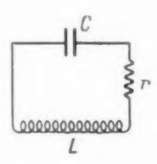


Fig. 6.

On suppose que la tension aux plaques du condensateur, choisie comme variable, oscille librement suivant une loi pseudo-sinusoïdale très lentement amortie, de la forme

$$V = a(t)\sin\omega_0 t,$$

avec

$$a(t) = a_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(a_0, amplitude au temps $t = 0$; τ, constante de temps du circuit).

Une impulsion, produite par exemple par un saut électronique dans la résistance r, entraîne une modification instantanée de l'amplitude en même temps qu'un petit déphasage. La fréquence n'est pas affectée, puisqu'elle est rigidement liée à L et à C.

Les variations d'amplitude Δa et de phase $\Delta\varphi$, entraînées par le choc, seront aisément calculées (appendice I) en écrivant que ce dernier produit une discontinuité de la vitesse $\frac{dV}{dt}$ sans modifier V.

On trouve ainsi, en supposant que le choc est très faible à côté de l'amplitude d'oscillation libre, et en conservant seulement les parties principales de Δa et de $\Delta\varphi$:

$$\Delta a = q\omega_0\cos\omega_0 t_j, \tag{I.5}$$

$$a\,\Delta\varphi = -q\omega_0\sin\omega_0 t_j, \tag{I.6}$$

t_j désignant l'instant du choc, q son échelon, a l'amplitude de l'oscillation juste avant le choc.

Les expressions (I.5) et (I.6) nous conduisent aux remarques suivantes :

Remarque 1. — 1° Si l'instant t_j auquel est produit le choc est de la forme $t_j = kT_0$ (k, nombre entier), et coïncide par conséquent avec un point d'élongation nulle, on a

$$\sin\omega_0 t_j = 0, \qquad \text{donc} \quad \Delta\varphi = 0.$$

Le choc entraîne la variation d'amplitude $\Delta a = q\omega_0$ sans modification de phase.

2° Si l'instant t_j est de la forme $t_j = \frac{T_0}{4} + kT_0$, et coïncide avec un point d'élongation maximum, on a

$$\cos\omega_0 t_j = 0, \qquad \text{donc} \quad \Delta a = 0.$$

Le choc entraîne la variation de phase $\Delta\varphi = -\frac{q\omega_0}{a}$ sans modification d'amplitude.

3° Si l'instant t_j est quelconque, le choc naturel entraîne à la fois une variation d'amplitude et une variation de phase. On peut donc le remplacer par deux chocs composants du type précédent :

— Le premier, appliqué au point d'élongation nulle

$$t_{j_1} = k_1 T_0$$

le plus voisin de t_j, produira la même variation d'amplitude que le choc naturel (sans variation de phase). Nous l'appellerons « choc composant watté ».

— Le deuxième, appliqué au point d'élongation maximum

$$t_{j_2} = \frac{T_0}{4} + k_2 T_0$$

le plus voisin de t_j produira la même variation de phase que le choc naturel (sans variation d'amplitude). Nous l'appellerons de même « choc composant déwatté ».

Les expressions (I.5) et (I.6) nous montrent que les échelons de ces deux chocs composants devront être respectivement :

$$q\cos\omega_0 t_j \qquad \text{et} \qquad q\sin\omega_0 t_j,$$

l'échelon du choc naturel unique étant q.

Ce résultat est à rapprocher de celui qui a été établi à la fin du paragraphe A.*d*. Nous verrons plus loin, en effet, que les composants pair et impair de Rice ne sont autres que des composants watté et déwatté *réduits*.

Remarque 2. — Le système sur lequel agit le choc étant linéaire, on peut lui appliquer le principe de superposition des états.

On obtient ainsi simplement la modification de régime entraînée par le choc en superposant, à l'oscillation exponentielle amortie qu'aurait le circuit en l'absence d'impulsion, l'oscillation que produirait l'impulsion d'échelon q infligée au système initialement au repos.

Les deux oscillations sont représentées sur la figure 7.

La remarque 1 nous donne un procédé équivalent. Elle nous montre que l'on peut superposer à l'oscil-

lation non perturbée deux oscillations obtenues comme suit :

— La première, provenant de l'action du choc composant watté sur le circuit initialement au

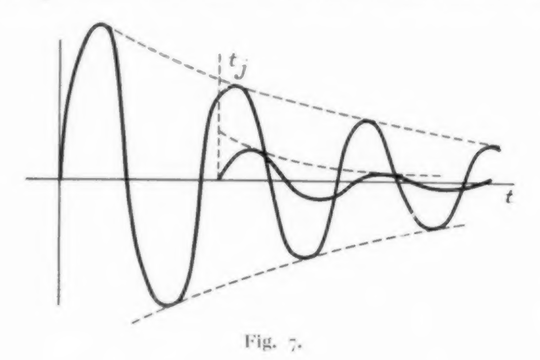


Fig. 7.

repos, est en phase ou en opposition de phase avec l'oscillation non perturbée. Nous l'appellerons « oscillation wattée »;

— La deuxième, provenant de l'action du choc composant déwatté sur le circuit initialement au repos, est en quadrature avance ou retard avec l'oscillation non perturbée. Nous l'appellerons, de même, « oscillation déwattée ».

Les deux oscillations composantes sont représentées sur la figure 8.

On doit noter que les deux oscillations composantes, wattée et déwattée, ainsi que l'oscillation résultant du choc naturel unique, sont ici du même type. Ce sont des oscillations amorties exponentiellement, de même constante de temps et de même pseudo-période que l'oscillation du régime non perturbé.

On introduira encore, lorsque l'oscillateur ne sera

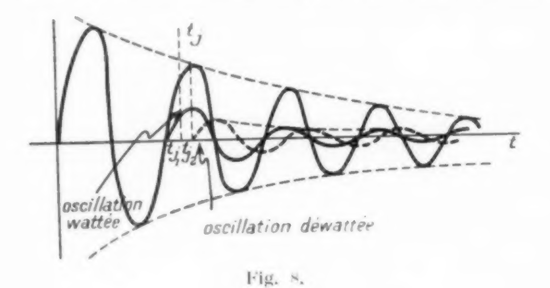


Fig. 8.

plus linéaire, une oscillation wattée et une oscillation déwattée. Nous verrons qu'une différence profonde entre ce dernier cas et le cas linéaire envisagé ici proviendra de ce que ces deux oscillations composantes ne seront plus du même type.

b. Transmission des composantes spectrales du choc. — Le problème résolu au paragraphe précédent (B.*a*) en conservant à l'impulsion sa personnalité peut être considéré sous un autre angle.

On peut utiliser le développement de Fourier de la fonction impulsive donnée et étudier isolément la transmission de chacune de ses composantes spectrales. On obtient ainsi directement le spectre d'amplitude de la réponse.

L'organe oscillant se comporte comme un filtre. Il modifie suivant des lois caractéristiques l'amplitude et la phase de chacune des raies du spectre d'entrée et il suffit, pour déterminer le spectre de sortie, de remplacer le choc initial par un choc réduit ayant pour largeur de spectre la bande passante du filtre.

c. Détermination graphique du spectre transmis, emploi du diagramme de Nyquist. — L'étude algébrique sera complétée par une méthode graphique

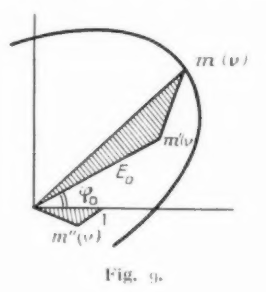


Fig. 9.

utilisant le diagramme de Nyquist du réseau oscillant.

Il serait long de redonner ici la théorie bien connue de Nyquist. Nous la passerons sous silence par souci de clarté [1].

Supposons donc le diagramme tracé sur le plan complexe. Chaque point $m(\nu)$ de cette courbe, image à un paramètre d'un nombre complexe $H(\nu)$ caractéristique du réseau, est lié à une fréquence ν (le paramètre en question). La courbe complète est, par suite, obtenue en balayant toute la gamme des fréquences.

Le choc étant développé en série de Fourier sur un intervalle de répétition o, T, nous aurons à déterminer graphiquement les réponses correspondant à chacune des raies spectrales d'entrée.

On utilisera pour cela une construction simple qui permet d'obtenir rapidement l'amplitude et la phase de l'oscillation forcée qui s'établit lorsque le réseau est attaqué par une f.é.m. de fréquence ν donnée

$$E = E_0 \sin(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

Nous indiquons ci-dessous les étapes de la construction dont la justification est immédiate (appendice II).

1° On fera correspondre à la f.é.m. d'attaque un point du plan complexe, pour cela :

a. On remplacera la f.é.m. donnée par la f.é.m. complexe

$$E^* = E_0\, e^{j\varphi_0}\, e^{j2\pi\nu t};$$

b. On marquera sur le plan du diagramme l'image $m'(\nu)$ du nombre complexe

$$E_0\, e^{j\varphi_0} = z(\nu).$$

2° On construira le point $m''(\nu)$, image du rapport complexe.

$$\frac{z(\nu)}{H(\nu)} \qquad [z(\nu), \text{ affixe de } m'(\nu);\ H(\nu), \text{ affixe de } m(\nu)].$$

L'amplitude et la phase cherchées sont respectivement la longueur du rayon vecteur et l'angle polaire du point $m''(\nu)$.

Lorsque la f.é.m. d'attaque n'est plus sinusoïdale, il suffit d'appliquer à chacun des termes de son développement de Fourier la méthode graphique précédente.

La construction devient particulièrement simple lorsque la f.é.m. est une impulsion donnée à l'origine des temps. Nous avons vu, en effet, que l'amplitude et la phase de tous ses termes de Fourier sont alors indépendants de la fréquence

$$G(t) = q\,\Delta\nu \sum_{-\infty}^{+\infty} \cos 2\pi\nu_n t.$$

Par suite, les points du plan complexe qui représentent ces divers harmoniques, correspondant au même rayon vecteur et au même angle polaire, sont confondus.

En résumé, la méthode consiste à transformer le diagramme de Nyquist point par point par une opération simple, et le spectre de sortie du système est représenté graphiquement par la courbe transformée.

Bien entendu, il faut superposer à la réponse ainsi trouvée, comme dans la méthode algébrique précédente, l'oscillation libre qu'aurait le système en l'absence de choc.

Signalons déjà que la méthode graphique sera adaptée plus loin au cas où le système oscillant n'est plus régi par une loi linéaire. Il suffira de remplacer le diagramme de Nyquist précédent par le diagramme de Nyquist mobile dont nous avons indiqué la définition et les principales propriétés dans un travail antérieur [1].

d. « *Réponse paire* » *et* « *réponse impaire* ». — Nous utiliserons maintenant la décomposition du choc, suivant la méthode de Rice, en une « impulsion paire » et une « impulsion impaire » (§ A.*d*).

L'équation qui représente l'effet du choc sur le système peut être écrite, pour l'exemple simple envisagé, sous la forme :

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + rC\frac{dV}{dt} + V = G(t - t_j), \tag{I.7}$$

$G(t - t_j)$ représentant la fonction impulsive donnée au temps t_j.

Les composantes paire et impaire de cette impulsion sont, en choisissant pour fréquence privilégiée la fréquence $\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ de l'oscillation libre du circuit (§ A.*d*)

$$G_1(t - t_j) = X(t - t_j)\cos 2\pi\nu_0 t,$$
$$G_2(t - t_j) = Y(t - t_j)\sin 2\pi\nu_0 t.$$

La réponse du système à l'impulsion naturelle $G(t - t_j)$ sera obtenue, puisque le système est linéaire, en superposant les effets produits séparément par $G_1(t - t_j)$ et $G_2(t - t_j)$.

L'équation (I.7) devra donc être remplacée par l'ensemble des deux équations

$$LC\frac{d^2V_1}{dt^2} + rC\frac{dV_1}{dt} + V_1 = G_1(t - t_j), \tag{I.8}$$

$$LC\frac{d^2V_2}{dt^2} + rC\frac{dV_2}{dt} + V_2 = G_2(t - t_j). \tag{I.9}$$

On vérifie aisément (appendice III) que V_1 et V_2 sont, comme $G_1(t - t_j)$ et $G_2(t - t_j)$, deux oscillations en quadrature (des types sin et cos) modulées par des fonctions $\xi(t - t_j)$ et $\eta(t - t_j)$ lentement variables.

Il est important de noter, d'ailleurs, qu'à *l'impulsion paire* $G_1(t - t_j)$ correspond une *solution impaire* V_1 de l'équation (I.8), de la forme

$$V_1 = \xi(t - t_j)\sin 2\pi\nu_0 t,$$

tandis qu'à l'*impulsion impaire* $G_2(t - t_j)$ correspond une *solution paire* V_2, de l'équation (I.9), de la forme

$$V_2 = \eta(t - t_j)\cos 2\pi\nu_0 t.$$

Il est, par suite, plus logique d'intervertir les indices 1 et 2 :

L'indice 1 et la lettre ξ seront réservés à une oscillation paire, et l'indice 2 et la lettre η à une oscillation impaire.

Nous réécrirons donc les équations (I.8) et (I.9) sous la forme :

$$(\text{I.10}) \qquad LC\frac{d^2 V_2}{dt^2} + rC\frac{dV_2}{dt} + V_2 = G_1(t - t_j),$$

$$(\text{I.11}) \qquad LC\frac{d^2 V_1}{dt^2} + rC\frac{dV_1}{dt} + V_1 = G_2(t - t_j),$$

avec

$$V_1 = \xi(t - t_j)\cos 2\pi\nu_0 t,$$
$$V_2 = \eta(t - t_j)\sin 2\pi\nu_0 t.$$

L'oscillation complète du système après le choc sera obtenue, comme plus haut, en superposant à l'oscillation $V_1 + V_2$ ainsi déterminée, l'oscillation libre qu'aurait le circuit en l'absence d'impulsion.

Nous conclurons cette première partie, réservée à l'étude de la fonction impulsive originelle et de la « réponse » d'un système linéaire à une impulsion, par une *remarque très importante pour la suite.*

Nous avons été amené à introduire, par deux procédés différents, une décomposition de l'impulsion naturelle unique en deux impulsions composantes dont l'effet couplé est équivalent.

La méthode de Rice (§A.*d*) nous a conduit à définir une « impulsion paire » $G_1(t-t_j)$ et une « impulsion impaire » $G_2(t-t_j)$.

L'action d'un choc sur un système linéaire (§ B.*a*, remarque 1) nous a conduit, de même, à une « impulsion wattée » et à une « impulsion déwattée » $\Big($infligées au système aux temps $t_{j1} = kT_0$ et $t_{j2} = \frac{T_0}{4} + kT_0$, T_0 étant la période du signal théorique$\Big)$.

Il est facile de se rendre compte que l'impulsion paire $G_1(t-t_j)$ peut être remplacée, à une approximation du second ordre, par

$$G_1(t - t_{j_1}) = \xi(t - t_{j_1})\cos 2\pi\nu_0 t.$$

En effet, cette assimilation n'affecte que l'enveloppe de l'oscillation qui subit une translation, parallèle à l'axe des temps, d'autant plus petite que t_j est plus voisin de t_{j_1}, c'est-à-dire que la fréquence d'oscillation est plus grande.

Il suffit de se reporter à la figure 5 pour voir que le résultat est intuitif.

De même, l'impulsion impaire $G_2(t-t_j)$ peut être remplacée par

$$G_2(t - t_{j_2}) = \eta(t - t_{j_2})\sin 2\pi\nu_0 t.$$

Dans ces conditions, l'impulsion paire $G_1(t-t_{j1})$ et l'impulsion wattée appliquée au temps t_{j1} sont identiques, ainsi que l'impulsion impaire $G_2(t-t_{j2})$ et l'impulsion déwattée appliquée au temps t_{j2}, à cela près que les impulsions paire et impaire de Rice sont des impulsions wattée et déwattée *réduites.*

Les réponses V_1 et V_2 se confondent alors avec les oscillations déwattée et wattée représentées sur la figure 8.

2. **Propriétés statistiques du bruit de fond.**

a. Oscillogramme de bruit. — Considérons, pour fixer les idées, la source de bruit qu'est une simple résistance morte. On sait qu'entre ses extrémités apparaît, par suite de l'agitation thermique désordonnée des électrons internes, une f.é.m. $E(t)$ dont la variation au cours du temps est très irrégulière.

Si l'on enregistre l'évolution rapide de $E(t)$, on obtient un oscillogramme (*fig.* 10) dont l'aspect

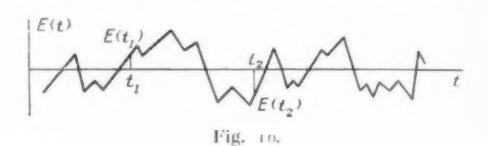


Fig. 10.

conduit aux remarques suivantes, qui résument les principales caractéristiques du bruit de fond :

1° La fonction $E(t)$ ne présente aucune périodicité.

2° Connaissant la valeur $E(t_1)$ de la f.é.m. à un instant t_1, il est impossible de prédire la valeur $E(t_2)$ que prendra la f.é.m. à un autre instant t_2.

$E(t_1)$ et $E(t_2)$ sont deux valeurs de la f.é.m. sans relation entre elles. Elles sont dites « non corrélées ».

3° $E(t)$ a autant de chances de prendre une valeur positive donnée que la valeur opposée. Il s'ensuit que sa « moyenne dans le temps » définie par l'expression

$$\overline{E(t)} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_0^T E(t)\,dt$$

est nulle.

Notons cependant que, si l'on place en série avec la résistance une f.é.m. constante, l'oscillogramme est déplacé verticalement par translation et la moyenne $\overline{E(t)}$ a une valeur non nulle : la f.é.m. constante donnée.

Les propriétés 1°, 2° et 3° sont alors valables pour la partie fluctuante $E(t)-\overline{E(t)}$ de $E(t)$.

b. Caractère stationnaire de la fonction de bruit. — S'il est impossible de prédire la valeur que prendra la fonction $E(t)$ à un instant futur, on peut du moins évaluer la probabilité pour qu'elle ait, à cet instant, une valeur E_n avec une plage d'erreur dE_n.

Soit $P(E_n)\,dE_n$ cette probabilité. $P(E_n)$ dépend

évidemment de E_n, on l'appelle « loi de distribution » ou « densité de probabilité ».

On parlera souvent aussi de la « valeur moyenne » de $E(t)$; précisons ce que l'on entend exactement par là :

Supposons que nous déterminions $E(t)$ tous les jours, à la même heure, cette grandeur prendra en p jours consécutifs les valeurs $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_p$.

Sa valeur moyenne ou *espérance mathématique* est la limite de

$$M_e(E_p) = \frac{E_1 + E_2 + \ldots + E_p}{p} \qquad \text{quand} \quad p \to \infty.$$

On peut aussi suivre de façon continue les variations au cours du temps de $E(t)$ pendant une durée T aussi longue que possible, et construire un oscillogramme.

La *moyenne temporelle* est alors définie comme limite de

$$M_T[E(t)] = \frac{1}{T}\int_0^T E(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{quand} \quad T \to \infty.$$

Les deux définitions sont généralement distinctes. Tandis que la moyenne temporelle ne renferme plus la variable t, l'espérance mathématique d'une variable aléatoire peut, au contraire, dépendre de l'instant auquel sont effectuées les mesures.

Dans l'exemple choisi, cependant, les qualités statistiques de la variable sont indépendantes de l'instant considéré. L'espérance mathématique est alors indépendante du temps, et l'on montre qu'elle se confond avec la moyenne temporelle [cette moyenne sera notée $\overline{E(t)}$].

Les grandeurs aléatoires présentant cette propriété sont appelées « variables aléatoires stationnaires » et les deux définitions de la moyenne se confondent dans ce cas.

On vérifie facilement que la moyenne d'une variable aléatoire stationnaire, de la forme $f(E)$ par exemple, est liée à la loi de distribution $P(E)$ par la relation importante

$$\overline{f(E)} = \int_0^\infty f(E)\,P(E)\,\mathrm{d}E.$$

Nous rencontrerons fréquemment par la suite les expressions suivantes :

$\overline{E(t)}$, moyenne de $E(t)$, ou *courant direct* de l'oscillogramme;

$\overline{E^2(t)}$, *carré moyen* de $E(t)$;

$E(t) - \overline{E(t)}$, écart à la moyenne, ou *fluctuation* de $E(t)$;

$\overline{|E(t) - \overline{E(t)}|^2}$, *carré moyen de la fluctuation* de $E(t)$.

c. Fonction de corrélation de $E(t)$. — La variation de $E(t)$ n'est pas toujours aussi anarchique que nous l'avons supposé au début. Le plus souvent, au contraire, les valeurs $E(t_2)$ et $E(t_1)$ correspondant à deux instants voisins ne sont pas *absolument indépendantes*. On est alors amené à préciser l'intervalle limite au delà duquel cesse, en moyenne, la corrélation de $E(t_1)$ et $E(t_2)$. Cet intervalle est appelé « intervalle de corrélation λ_0 ».

Cela revient à dire que $E(t)\,E(t+\lambda)$ est, en moyenne, différent de zéro tant que λ est inférieur à λ_0, et identiquement nul lorsque λ est supérieur à l'intervalle de corrélation λ_0.

On introduit ainsi la fonction

$$\psi(\lambda) = \overline{E(t)\,E(t+\lambda)}$$

appelée « fonction de corrélation de $E(t)$ ».

d. Développement de Fourier de l'oscillogramme de bruit. — La f.é.m. de bruit ne présente aucune périodicité. On peut cependant, comme pour la fonction impulsive déjà étudiée, introduire une périodicité fictive.

Soit T la durée d'enregistrement d'un oscillogramme de bruit, un jour par exemple. La même expérience répétée le jour suivant redonnera certainement un oscillogramme différent. On ne modifie cependant nullement les propriétés de l'oscillogramme enregistré un certain jour en imaginant que l'expérience effectuée le jour suivant redonne un oscillogramme parfaitement identique. Cette hypothèse gratuite a l'avantage de faire apparaître un intervalle de répétition T. Elle permet donc la décomposition du motif périodique en série de fonctions trigonométriques.

Donnons quelques formes utiles du développement d'un oscillogramme de durée T (intervalle de répétition T) :

1° Somme de fonctions trigonométriques réelles à fréquences positives :

$$E(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{T}\cos(2\pi\nu_n t - \varphi_n) \qquad \left(\nu_n = \frac{n}{T}\right);$$

2° La même série où l'on a développé les fonctions trigonométriques en sommes de sin et de cos :

$$E(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{T}\cos 2\pi\nu_n t + \frac{B_n}{T}\sin 2\pi\nu_n t,$$

avec

$$\nu_n = \frac{n}{T},$$
$$A_n = C_n \cos\varphi_n,$$
$$B_n = C_n \sin\varphi_n;$$

3° Somme de fonctions trigonométriques réelles à fréquences positives ou négatives :

$$E(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{C_n}{T}\cos(2\pi\nu_n t-\varphi_n);$$

4° Somme d'exponentielles complexes (fréquences positives ou négatives) :

$$E(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\frac{C_n}{T}e^{j(2\pi\nu_n t-\varphi_n)}.$$

Les coefficients doivent être déterminés pour chaque oscillogramme particulier : toutes les fois que l'on enregistre un oscillogramme différent de durée T, on obtient en effet un lot de valeurs C_n et φ_n, ou A_n et B_n différent. C_n et φ_n, ainsi que A_n et B_n sont des couples de coefficients aléatoires, qui vérifient

$$\overline{A_n}=\overline{B_n}=0,$$

$$\overline{A_n^2}=\overline{B_n^2}=\frac{\overline{C_n^2}}{2}.$$

Les composants de Fourier de l'oscillogramme émis par la source sont uniformément répartis sur toute la gamme des fréquences. Cependant, les bruits observés en pratique sont toujours transmis par des organes radioélectriques de bande passante donnée, qui arrêtent les harmoniques situés en dehors de cette bande. Le bruit pur originel apparaît donc comme une limite théorique inobservable, que l'on doit toujours remplacer, dans les cas réels, par un bruit à bande limitée.

e. Puissance de bruit. — Supposons que la f.é.m. de bruit $E(t)$ (exprimée en volts) soit appliquée aux extrémités d'une résistance de 1 Ω. Elle y dépenserait pendant un instant très court dt l'énergie instantanée $E^2(t)\,dt$ joules, ou la puissance instantanée $E^2(t)$ watts. Il sera commode d'assimiler toujours de cette façon le carré de la f.é.m. de bruit à une puissance instantanée, que nous appellerons *puissance réduite instantanée*.

La *puissance efficace* de l'oscillogramme de bruit est alors la puissance mesurée au moyen d'un wattmètre thermique de résistance unité. C'est donc la moyenne temporelle de $E^2(t)$ prise sur la durée T de l'expérience. Comme on l'a vu, cette moyenne temporelle se confond ici avec l'espérance mathématique de $E(t)$.

Si $E(t)$ a un courant direct non nul $E_{cd}=\overline{E(t)}$, une partie de la puissance réduite moyenne est due à ce courant direct. Une autre partie provient des variations irrégulières de $E(t)$ autour de cette valeur moyenne (*fig.* 11).

Mettons, en effet, en évidence le courant direct E_{cd} et la partie variable de $E(t)$

$$E(t)=E_{cd}+[E(t)-E_{cd}],$$

la puissance réduite moyenne a pour valeur

$$\overline{E^2(t)}=E_{cd}^2+2E_{cd}\overline{[E(t)-E_{cd}]}+\overline{[E(t)-E_{cd}]^2}$$

ou, plus simplement, puisque l'on a $\overline{E(t)-E_{cd}}=0$,

$$\overline{E^2(t)}=E_{cd}^2+\overline{[E(t)-E_{cd}]^2},$$

E_{cd}^2, est la puissance réduite dépensée par la tension constante E_{cd};

$\overline{[E(t)-E_{cd}]^2}$, carré moyen de la fluctuation de $E(t)$,

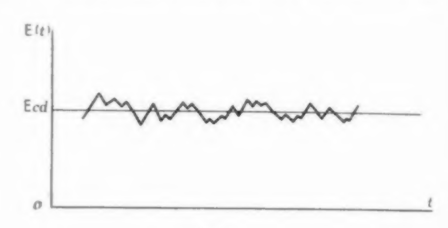


Fig. 11.

représente la puissance dépensée par la partie variable de la tension $E(t)$.

f. Spectre de puissance de l'oscillogramme de bruit. — Voyons maintenant quelle est la contribution apportée à la puissance réduite moyenne par chacun des composants de Fourier.

Reprenons pour cela le développement d'un oscillogramme particulier de durée T. Pour la clarté de l'exposé, nous utiliserons la forme qui ne fait intervenir que des fréquences positives :

$$E(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{T}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t-\varphi_n\right).$$

La puissance instantanée dépensée par la partie variable de cet oscillogramme est

$$[E(t)-C_0]^2=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{T}\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}-\varphi_n\right)\right]^2$$

ou, en développant le carré du second membre

$$[E(t)-C_0]^2=\sum_n\frac{C_n^2}{T^2}\cos^2\left(\frac{2\pi n}{T}t-\varphi_n\right)+\sum_{p\neq q}\frac{C_pC_q}{T^2}\cos\left(\frac{2\pi p}{T}t-\varphi_p\right)\times\cos\left(\frac{2\pi q}{T}t-\varphi_q\right).$$

La puissance efficace dépensée par un terme de la forme

$$\frac{C_n^2}{T^2}\cos^2\left(\frac{2\pi nt}{T}-\varphi_n\right)$$

vaut $\frac{1}{2}\frac{C_n^2}{T^2}$.

La puissance efficace dépensée par un terme de la forme :

$$\left[\frac{C_pC_q}{T^2}\cos\left(\frac{2\pi p}{T}t-\varphi_p\right)\cos\left(\frac{2\pi q}{T}t-\varphi_q\right)\right]_{p\neq q}$$

est nulle.

Par conséquent, la puissance efficace dépensée par l'oscillogramme de bruit précédent se réduit à

$$\sum_n \frac{1}{2}\frac{C_n^2}{T^2}.$$

Prenant alors la moyenne, pour un grand nombre d'oscillogrammes différents de même durée T, nous trouvons pour puissance réduite moyenne :

$$\sum_n \frac{1}{2}\frac{\overline{C_n^2}}{T^2}.$$

Cette formule simple montre que la puissance moyenne de bruit est la somme des puissances réduites moyennes dépensées par chacun des composants de Fourier.

Si l'on porte sur un graphique, en abscisse les fréquences des harmoniques successifs, distants de $\Delta\nu=\frac{1}{T}$, en ordonnée les puissances réduites moyenne $\frac{1}{2}\frac{\overline{C_n^2}}{T^2}$ de ces harmoniques, on obtient un spectre de puissance du bruit. Il est constitué par une succession de raies équidistantes.

Si l'intervalle de répétition T tend vers l'infini, $\Delta\nu=\frac{1}{T}$ et $\frac{1}{2}\frac{\overline{C_n^2}}{T^2}$ tendent vers zéro. Le spectre vient se confondre avec l'axe des abscisses.

Pour éviter cette dégénérescence, on choisit des ordonnées proportionnelles à $\frac{1}{2}\frac{\overline{C_n^2}}{T^2}$ dont la valeur reste constante quand $T\to\infty$:

$$\zeta_n=\frac{1}{2}\frac{\overline{C_n^2}}{T}$$

remplit bien cette condition, car $\overline{C_n^2}$ est un infiniment grand du même ordre que T.

Ainsi, lorsque $T\to\infty$, les raies gardent une longueur constante et se rapprochent les unes des autres, formant à la limite un spectre continu.

Remarque 1. — Dans le cas du bruit pur originel, la théorie de Nyquist permet d'exprimer $\frac{1}{2}\frac{\overline{C_n^2}}{T}$ en fonction de la résistance génératrice r, et de sa température absolue T_K on a

$$\frac{1}{2}\frac{\overline{C_n^2}}{T}=4krT_K,$$

k, constante de Boltzmann.

Remarque 2. — Dans le cas général (bruit originel ou bruit transmis par un système), la puissance réduite moyenne d'une bande, limitée par les fréquences extrêmes ν_1 et ν_2, est mesurée par la surface du spectre de puissance précédent comprise entre ν_1 et ν_2. Elle vaut :

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2}\zeta_n\,d\nu$$

ou, pour le bruit à la source,

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2}4\,krT_K\,d\nu.$$

Remarque 3. — La formule ci-dessus nous montre que si la largeur de bande $\nu_2-\nu_1$ tend vers l'infini, la puissance réduite du bruit à la source tend, elle aussi, vers l'infini, mais ce cas théorique est sans intérêt, puisque la largeur de bande est toujours limitée par des systèmes sélectifs.

g. Relation entre la fonction de corrélation $\overline{\psi(\lambda)}$ et le spectre de puissance du bruit. — La fonction de corrélation de l'oscillogramme de bruit est simplement reliée au développement de Fourier de $E(t)$

$$E(t)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{T}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t-\varphi_n\right)$$

(intervalle de répétition o, T).

En effet, si nous développons le produit

$$E(t)\,E(t+\lambda)=\left\{C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{T}\cos\left(\frac{2\pi n}{T}t-\varphi_n\right)\right\}\times\left\{C_0+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{C_p}{T}\cos\left[\frac{2\pi p}{T}(t+\lambda)-\varphi_p\right]\right\}$$

et si nous prenons sa moyenne en tenant compte de la non-corrélation des divers harmoniques, nous trouvons

$$\overline{\psi(\lambda)}=\overline{E(t)\,E(t+\lambda)}=C_0^2+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\overline{C_n^2}}{2T^2}\cos\frac{2\pi n}{T}\lambda.$$

On obtient ainsi rapidement le développement de Fourier de $\overline{\psi(\lambda)}$, et l'on voit clairement que le coefficient de *son* $n^{\text{ième}}$ *harmonique est la puissance*

sance $\frac{1}{2}\frac{C_n^2}{T^2}$ *dépensée par le* $n^{ième}$ *harmonique du bruit* $E(t)$.

Cette propriété, qui permet de déduire le spectre de puissance du bruit de sa fonction de corrélation, est d'un grand intérêt. Il est plus facile, en effet, dans certains cas, de déterminer la fonction de corrélation $\overline{\psi(\lambda)}$ et son développement de Fourier que le développement de Fourier de $E(t)$.

h. Décomposition de l'oscillogramme par la méthode de Rice. — Dans tous les problèmes où le bruit se superpose à un signal

$$S = a_0 \sin 2\pi\nu_0 t;$$

il est particulièrement commode de décomposer l'oscillogramme de bruit suivant la méthode de Rice.

Cette méthode consiste à remplacer l'oscillogramme donné par deux oscillogrammes composants modulant des sinusoïdes porteuses, l'une en phase, l'autre en quadrature avec le signal, de fréquence ν_0 (celle du signal).

On y parvient en remarquant que chaque terme de Fourier de la décomposition classique

$$\frac{C_n}{T}\cos(2\pi\nu_n t - \varphi_n)$$

peut être mis sous la forme

$$\frac{C_n}{T}\cos[2\pi(\nu_n - \nu_0)t - \varphi_n]\cos 2\pi\nu_0 t$$
$$-\frac{C_n}{T}\sin[2\pi(\nu_n - \nu_0)t - \varphi_n]\sin 2\pi\nu_0 t.$$

Il ne reste plus qu'à faire la somme des termes en $\cos 2\pi\nu_0 t$, d'une part et, d'autre part, des termes en $\sin 2\pi\nu_0 t$ y compris le signal.

On voit que l'onde porteuse en phase avec le signal est modulée par un oscillogramme dont la décomposition de Fourier est

$$Y(t) = -\sum_n \frac{C_n}{T}\sin[2\pi(\nu_n - \nu_0)t - \varphi_n].$$

L'onde porteuse en quadrature est modulée par l'oscillogramme

$$X(t) = \sum_n \frac{C_n}{T}\cos[2\pi(\nu_n - \nu_0)t - \varphi_n]$$

et l'enveloppe du signal entaché de bruit est

$$R(t) = \sqrt{X^2(t) + [Y(t) + a_0]^2}.$$

i. Relation entre les propriétés statistiques et les propriétés élémentaires. — L'étude des causes du bruit de fond montre que l'oscillogramme précédent est toujours la somme d'effets élémentaires dus à des chocs originels. Un oscillogramme de bruit a donc une « structure grenue » et l'on peut déduire ses propriétés de celles des *motifs originels* qui le constituent. Il serait long d'établir les relations existant entre les propriétés élémentaires et les propriétés statistiques, aussi nous contenterons-nous d'indiquer les plus importantes, dont nous aurons à nous servir plus loin.

Courant direct de l'oscillogramme. Puissance de bruit. Théorèmes de Campbell. — Soit T l'intervalle de répétition de l'oscillogramme et K le nombre moyen de motifs élémentaires $F(t-t_i)$ (que l'on peut supposer identiques et répartis au hasard sans restreindre la généralité des raisonnements) de o à T. Le courant direct de l'oscillogramme est égal à K fois la moyenne d'un motif, soit

$$E_{cd} = K\frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt.$$

Sa puissance est aussi K fois la puissance moyenne d'un motif.

Fonction de corrélation de l'oscillogramme. — Lorsque l'oscillogramme n'a pas de courant direct, on démontre aisément que la fonction de corrélation moyenne de cet oscillogramme s'obtient en multipliant par K celle d'un motif élémentaire, on a

$$\overline{\psi(\lambda)} = K\frac{1}{T}\int_0^T F(t)F(t+\lambda)\,dt.$$

Lorsque l'oscillogramme a un courant direct E_{cd}, il suffit d'ajouter à la fonction de corrélation moyenne précédente le carré E_{cd}^2 de ce courant direct.

Composants de Rice de l'oscillogramme. — On voit aussi que les composants de Rice de l'oscillogramme s'obtiennent en sommant les composants de Rice des motifs élémentaires.

II. EFFET DU BRUIT DE FOND SUR LE RÉGIME DES AUTO-OSCILLATEURS NON LINÉAIRES.

Les éléments réunis dans le premier chapitre permettent de résoudre la plupart des problèmes usuels concernant le bruit de fond. Nous allons les utiliser pour étudier l'influence du bruit sur le régime d'un oscillateur à lampe.

Nous nous intéresserons surtout au cas où le bruit fait subir à l'oscillation des fluctuations au

voisinage de la stabilisation théorique, qui serait atteinte en l'absence de bruit.

On sait qu'au voisinage de la stabilisation, il n'est plus possible de décrire l'oscillation du système, tout bruit mis à part, par une équation différentielle linéaire, ce qui rend délicate l'application des principes exposés jusque-là. L'oscillateur sera dit alors *non linéaire*.

Il sera cependant intéressant d'établir le parallèle entre l'oscillateur à peu près stabilisé envisagé et le pendule à self, capacité, résistance du premier chapitre.

Notons que l'on passe de façon continue de ce circuit pendulaire à l'auto-oscillateur en introduisant une réaction de plus en plus notable. On diminue ainsi graduellement l'amortissement apparent jusqu'au moment où se produit l'instabilité, c'est-à-dire l'amorçage d'oscillations auto-entretenues.

Supposant ces conditions critiques atteintes, nous verrons que le bruit produit des variations irrégulières de la fréquence, ce qui rend difficile sa définition précise.

D'autre part, l'oscillateur émet, en même temps que le signal qu'on lui demande, un certain « volume » de bruit que l'on ne pourra plus réduire sans détériorer aussi le signal.

1. Les conditions expérimentales.

a. Influence directe ou indirecte des sources de bruit. L'effet du bruit sous sa forme la plus générale. — Considérons d'abord le circuit très simple renfermant une seule lampe, représenté sur le schéma ci-dessous. Deux sources de bruit y sont apparentes.

L'agitation thermique dans la résistance série du circuit oscillant L, C, r;

L'effet de grenaille de la lampe d'entretien.

Il sera d'ailleurs commode de ramener ces deux effets à un même type en remplaçant la deuxième source par une résistance R_L équivalente indiquée sur le dessin.

Les f.é.m. aléatoires de bruit, engendrées dans r et R_L seront respectivement représentées par les « oscillogrammes » $E(t)$ et $E_L(t)$. De même, les chocs élémentaires qui constituent ces oscillogrammes seront notés $G(t-t_i)$ et $G_L(t-t_k)$.

Pour déterminer la perturbation apportée au régime oscillant, il suffit de remarquer qu'en un point du circuit (au point A de la grille, par exemple) se superposent un signal et un bruit. L'ensemble signal-bruit est amplifié par la lampe sur le parcours ($A\,l\,B$). Il est ensuite transmis au circuit oscillant par le couplage M. Il en résulte une modification du voltage en A par réaction.

Pour connaître l'effet de cette réaction, il convient, en premier lieu, de trouver la relation entre les f.é.m. aléatoires de bruit aux sources, $E(t)$ et $E_L(t)$, et la tension V au point A.

Les équations classiques aux mailles et aux nœuds, jointes à l'équation de la caractéristique courbe de la lampe, mise sous la forme d'un développement limité :

$$i_p = sV + aV^2 + bV^3 \quad \text{(penthode)}$$

donnent rapidement cette relation. Nous admettrons, pour simplifier les calculs, que la caractéristique ne renferme pas de terme carré ($a = 0$). Cette hypothèse est valable en pratique pour de nombreux

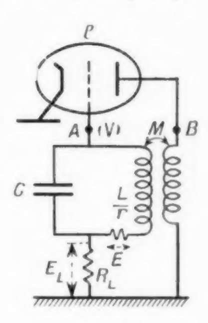


Fig. 12.

oscillateurs, en particulier ceux qui utilisent un montage push-pull ([3]).

L'effet du bruit sur le potentiel en A est traduit en définitive par l'équation différentielle non linéaire :

$$\text{(II.1)} \quad LC\frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC - 3MbV^2)\frac{dV}{dt} + V = E - \left(1 + LC\frac{d^2}{dt^2} + rC\frac{d}{dt}\right)E_L.$$

Approximation linéaire au voisinage de l'amorçage. — Lorsque l'oscillateur entre en fonctionnement à partir du repos, l'amplitude d'oscillation est d'abord assez faible pour que l'on puisse négliger V^2. L'équation précédente est, dans ces conditions, approximativement linéaire et l'on voit que, si de plus le bruit de la lampe est négligeable

([3]) On sait que, dans le cas général, les termes pairs de la caractéristique ne modifient pas la valeur de l'amplitude stabilisée théorique, mais reportent leur effet sur les harmoniques 2, 4, ... De même, on vérifie aisément qu'ils n'affectent pas le spectre de bruit entourant la raie du fondamental, mais qu'ils interviennent dans l'élargissement des raies d'ordre 2, 4, ...

On ne restreint donc pas la généralité des raisonnements en les éliminant.

(ce que nous vérifierons plus loin), elle se réduit à

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC)\frac{dV}{dt} + V = E,$$

avec

$$Ms + rC = 0.$$

Ce cas peut être étudié de façon analogue à celui du circuit oscillant à self, capacité, résistance, sans réaction du premier chapitre pour lequel l'équation se réduisait à :

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + rC\frac{dV}{dt} + V = E.$$

La seule différence provient du signe du terme résistant. La fonction aléatoire $E(t)$ qui constitue l'attaque apparaît au second membre sans aucune altération.

Nous dirons que l'influence de la source de bruit est *directe*.

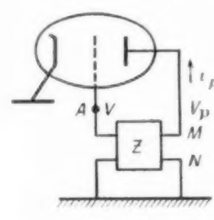


Fig. 13.

Considérons maintenant le cas théorique où $E(t)$ serait nul et où, par suite, le bruit de la lampe $E_L(t)$ ne pourrait être négligé. L'équation générale deviendrait alors :

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC)\frac{dV}{dt} + V = \left(1 + LC\frac{d^2}{dt^2} + rC\frac{d}{dt}\right)E_L.$$

Il apparaît clairement que les divers harmoniques de la fonction d'attaque $E_L(t)$ subissent une altération qui dépend de leur fréquence. Par exemple, si l'on utilise la décomposition de $E_L(t)$ en exponentielles complexes, on voit que l'harmonique de pulsation ω a son amplitude multipliée par $1 - LC\omega^2 + j\,rC\omega$.

Tout se passe comme si le bruit $E_L(t)$ avait été filtré par le circuit avant d'agir sur le système de résistance apparente $\frac{Ms}{C} + r$.

L'influence de la source de bruit sera dite, dans ce cas, *indirecte*.

Généralisons cette propriété. Un oscillateur idéal, supposé exempt de bruit, peut toujours être réduit au schéma simple (*fig.* 13) comportant :

— Un tube d'entretien ayant la tension de sortie V_p et le courant de sortie i_p, fonction de la tension d'entrée V au point A

$$i_p = f(V);$$

— Un quadripôle passif déphaseur et atténuateur, dont le coefficient de transfert symbolique est Z, tandis que l'impédance symbolique ramenée sur la plaque entre M et N est z (4).

Les équations du système oscillant sont :

$$V_p = -z i_p,$$
$$V = Z V_p,$$
$$i_p = f(V).$$

On en tire l'équation générale d'oscillation, que l'on peut mettre sous la forme symbolique :

$$V + Zzf(V) = 0$$

et qui exprime que la tension

$$ZV_p = -Zzf(V)$$

est ramenée par réaction à l'entrée.

S'il existe en une région du système une source de bruit, génératrice de la f.é.m. $E(t)$, il faut ajouter au terme $ZV_p = -Zz\,f(V)$ ramené sur l'électrode d'entrée, un terme ΔV obtenu en multipliant $E(t)$ par un coefficient de transfert convenable.

Aux sources de bruit $E_1(t)$, $E_2(t)$, ... correspondent les coefficients de transfert Z_1, Z_2, ... définis par

$$\Delta V_1 = Z_1 E_1(t),$$
$$\Delta V_2 = Z_2 E_2(t),$$
....

Le potentiel d'entrée résultant est alors :

$$V = -Zzf(V) + \sum_n Z_n E_n(t)$$

et l'équation complète d'oscillation est

$$(\text{II}.2) \qquad V + Zzf(V) = \sum_n Z_n E_n(t).$$

Le cas où l'influence de la source est directe est privilégié comme nous le verrons plus loin en appliquant cette équation à quelques oscillateurs.

b. Hypothèse simplificatrice : bruit faible par rapport à l'amplitude du signal. — Lorsque la stabilisation est atteinte, le terme en V^2 n'est plus négli-

(4) Les définitions d'un coefficient de transfert symbolique et d'une impédance symbolique ont été données dans la référence [1].

geable et l'équation qui exprime l'influence du bruit n'est plus linéaire. Nous devons la conserver sous sa forme générale (II.1).

Une hypothèse simplificatrice, toujours valable en pratique, consistera à considérer le bruit comme ayant une faible importance à côté de l'amplitude du signal émis.

La solution cherchée $V(t)$ du problème avec bruit différera, par suite, très peu de celle qui correspond à un régime non entaché de bruit.

$V_s(t)$ désignant cette dernière, nous admettrons que $V(t)$ s'en déduit par addition d'un terme de perturbation petit, $v(t)$

$$V(t) = V_s(t) + v(t).$$

Portant cette expression dans le premier membre de (II.1), nous trouvons, en négligeant les termes de bruit du second ordre :

$$LC\frac{d^2V_s}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV_s^2]\frac{dV_s}{dt} + V_s$$
$$+ LC\frac{d^2v}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV_s^2]\frac{dv}{dt}$$
$$\left[1 + 6MbV_s\frac{dV_s}{dt}\right]v$$
$$= E + \left(1 + LC\frac{d^2}{dt^2} + rC\frac{d}{dt}\right)E_L$$

ou, puisque l'on a par hypothèse

$$LC\frac{d^2V_s}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV_s^2]\frac{dV_s}{dt} + V_s = 0.$$

$$\text{(II.3)}\quad LC\frac{d^2v}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV_s^2]\frac{dv}{dt}$$
$$+ \left[1 + 6MbV_s\frac{dV_s}{dt}\right]v$$
$$= E + \left(1 + LC\frac{d^2}{dt^2} + rC\frac{d}{dt}\right)E_L.$$

Cette dernière équation a le gros avantage d'être linéaire par rapport à v, bien que l'oscillateur fonctionne à la stabilisation, c'est-à-dire dans des conditions non linéaires.

L'interprétation physique de ce résultat est facile. Le point représentatif M de l'oscillateur, sur la caractéristique $i_p = f(V)$ de la lampe (V potentiel de grille au point A, *fig.* 13 et 14), balaye autour du point de repos M_0 un arc de courbe étendu PQ.

La courbure de cet arc ne peut être négligée, puisque c'est elle qui entraîne la stabilisation en amplitude du système. L'équation d'oscillation générale est donc obligatoirement non linéaire.

Lorsqu'on ne fait pas intervenir le bruit, on trouve que le point M décrit l'arc PQ suivant une loi sinusoïdale du temps, avec la fréquence d'oscillation du régime, ν_0.

L'introduction de la source de bruit entraîne, à chaque instant, de légères fluctuations en position de M par rapport aux positions théoriques précédentes.

L'hypothèse d'un bruit faible suppose que ces fluctuations sont très petites. Les portions de l'arc PQ qu'elles affectent peuvent, par suite, être confondues avec de petits segments de droite.

L'équation qui décrit ces fluctuations doit donc être linéaire.

Nous donnerons encore à ce résultat une forme plus générale en utilisant l'équation symbolique (II.2).

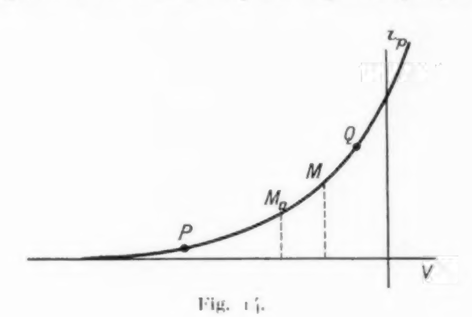


Fig. 14.

Posant toujours

$$V(t) = V_s(t) + v(t),$$

et conservant seulement la partie linéaire du développement de Taylor de $f(V)$

$$f(V) = f(V_s) + v f'(V_s),$$

on peut remplacer l'équation (II.2) par

$$V_s + v + Zz[f(V_s) + v f'(V_s)] = \sum_n Z_n E_n(t).$$

On a, de plus, par hypothèse

$$V_s + Zz f(V_s) = 0.$$

L'équation se réduit donc à

$$v + Zz[v f'(V_s)] = \sum_n Z_n E_n(t),$$

équation linéaire en v.

On vérifie immédiatement que l'on retrouve, dans le cas particulier choisi, l'équation en v précédente (II.3).

c. Effets négligeables du bruit introduit par la lampe. — L'hypothèse d'un bruit faible nous a conduit à représenter les effets des sources par l'équation (II.3). Cette équation est linéaire et nous permet, par suite, de dissocier l'action de la lampe

de celle du circuit. Le bruit engendré dans le circuit agira donc sur le potentiel de grille suivant la loi :

$$(\text{II}.4)\quad LC\frac{d^2V}{dt^2}+(Ms+rC+3MbV^2)\frac{dV}{dt}+V=E.$$

L'effet du bruit de la lampe sera traduit de même, par

$$(\text{II}.5)\quad LC\frac{d^2V}{dt^2}+(Ms+rC+3MbV^2)\frac{dV}{dt}+V$$
$$=\left(1+LC\frac{d^2}{dt^2}+rC\frac{d}{dt}\right)E_L.$$

V représente le potentiel de grille, c'est-à-dire un signal entaché de bruit.

Dans la première équation, où nous supposons

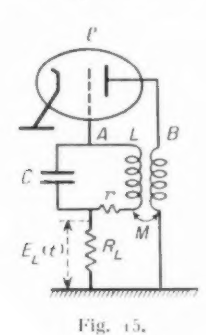


Fig. 15.

que la résistance équivalente R_L n'engendre aucune f.é.m., V représente aussi la d.d.p. aux bornes de la capacité du circuit oscillant (si l'on néglige le débit de grille, toujours très faible en pratique).

Dans le second cas, la d.d.p. aux bornes de cette capacité vaut $V-E_L$, différence entre le potentiel de grille en A et la f.é.m. créée par R_L.

Les résultats seront plus clairs si nous choisissons cette nouvelle variable $V-E_L$ puisque, dans les deux cas, elle nous renseignera sur le comportement du circuit oscillant indépendamment des autres organes.

On vérifie aisément que l'équation (II.5) qui traduit l'influence de la lampe peut être écrite sous la forme :

$$(\text{II}.6)\quad \left[LC\frac{d^2}{dt^2}+(Ms+rC)\frac{d}{dt}+1\right](V-E_L)$$
$$+Mb\frac{d}{dt}V^3=-Ms\frac{d}{dt}E_L.$$

Remarquant alors que l'on a

$$(V-E_L)^3\sim V^3-3V^2E_L$$

en négligeant les termes en E_L^2 et E_L^3 (bruit faible), l'équation (II.6) sera écrite sous la forme suivante, qui ne fait intervenir que la variable $V-E_L$

$$(\text{II}.7)\quad \left[LC\frac{d^2}{dt^2}+(Ms+rC)\frac{d}{dt}+1\right](V-E_L)$$
$$+Mb\frac{d}{dt}(V-E_L)^3$$
$$=-\frac{d}{dt}(MsE_L+3MbV^2E_L).$$

La signification physique de l'équation (II.7) est claire :

Nous pouvons remplacer la f.é.m. de bruit $E_L(t)$ extérieure au circuit oscillant par une f.é.m., en série avec la self et la capacité du circuit oscillant de valeur

$$-\frac{d}{dt}(MsE_L+3MbV^2E_L).$$

On comparera facilement cette dernière avec la f.é.m. créée par r, $E(t)$, qui est placée elle-même en série.

Nous allons retrouver ce résultat par une méthode qui montrera mieux le détail du mécanisme du phénomène.

Suivons la boucle de réaction (*fig.* 15).

La variation de la polarisation de grille au point A, produite par la f.é.m. aléatoire $E_L(t)$ engendrée dans R_L, se confond avec $E_L(t)$ puisque le débit de grille est nul.

Elle entraîne des fluctuations du courant de plaque calculées à partir de

$$i_p(t)=s(t)E_L(t),$$

Fig. 16.

$s(t)$ étant la pente de la caractéristique au point de fonctionnement, au temps t (*fig.* 16).

Les variations du courant de plaque sont transmises au circuit oscillant par la mutuelle M. Elles créent une f.é.m. d'induction, en série avec les éléments du circuit, de valeur

$$(\text{II}.8)\qquad e=-M\frac{di_p}{dt}=-\frac{d}{dt}Ms(t)E_L(t).$$

Il ne reste plus qu'à expliciter $s(t)$.

La caractéristique a été représentée, autour du point de repos M_0, par le développement :

$$i_p = sV + bV^3 \quad \text{au troisième ordre.}$$

A l'instant t, le point de fonctionnement est M. Son abscisse est $V(M)$, et la pente de la caractéristique est :

$$s(M) = \left(\frac{\mathrm{d}i_p}{\mathrm{d}V}\right)_M = s + 3bV^2(M).$$

La f.é.m. série donnée par la formule (II.8) est donc :

$$e = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MsE_L + 3MbV^2E_L).$$

Nous retrouvons bien l'expression mentionnée plus haut.

Nous pouvons maintenant comparer les effets du bruit émis par la résistance série r du circuit oscillant et de celui produit par la lampe. La résistance équivalente de la lampe sera remplacée par la résistance série ramenée que nous venons de déterminer.

Remarquons que $s(M)$ diffère assez peu de la pente au point de repos $s(M_0)$. On peut, par suite, remplacer l'expression (II.8) par

$$e = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} MS\, E_L(t),$$

S désignant la valeur moyenne de la pente pour une période d'oscillation.

Le spectre du bruit $E_L(t)$ sera réduit, par suite de la sélectivité du circuit oscillant, à une bande de fréquences voisines de la fréquence propre $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ de ce circuit oscillant. La f.é.m. ramenée en série sera donc remplacée par

$$-j\, MS\omega_0 E_L(t).$$

La puissance de bruit qui lui correspond a pour valeur :

$$M^2 S^2 \omega_0^2 E_L^2(t)$$

et nous voyons que la réaction a pour effet de multiplier la puissance de bruit, effectivement émise par la lampe, par le facteur :

$$M^2 S^2 \omega_0^2.$$

Nous allons évaluer ce facteur.

A la stabilisation, la pente moyenne sur une période, S, prend une valeur qui annule exactement la résistance apparente moyenne de l'oscillateur. On a

$$MS + rC = 0 \qquad \text{ou} \qquad |MS| = rC.$$

Le facteur trouvé devient :

$$r^2 C^2 \omega_0^2$$

ou, avec $rC\,\omega_0 = \frac{1}{Q}$ (Q, coefficient de surtension du circuit oscillant)

$$M^2 S^2 \omega_0^2 = \frac{1}{Q^2}.$$

Cette expression nous permettra de négliger dans la suite le bruit produit par la lampe à côté du bruit d'agitation thermique du circuit oscillant.

Par exemple, pour des quartz dont les coefficients de surtension auront des valeurs comprises entre

$$Q = 5.10^4 \qquad \text{et} \qquad Q = 3.10^5.$$

Les facteurs de réduction $\frac{1}{Q^2}$ seront compris entre

$$\frac{1}{Q^2} = 4.10^{-10} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{Q^2} = 10^{-11}.$$

tandis que la résistance équivalente R_L n'est que 10^2 à 10^3 fois supérieure à la résistance série du circuit oscillant.

2. La perturbation apportée au signal théorique par le bruit.

Les conditions dans lesquelles nous nous placerons seront celles que nous venons de préciser :

— Le bruit restera faible à côté de l'amplitude du signal émis;

— La source agira « directement » sur le système. Elle sera réduite en l'occurence à la résistance série du circuit oscillant.

Il ne nous reste plus qu'à calquer les méthodes employées antérieurement à l'étude du circuit amorti classique non entretenu (chap. I, § B).

Les différences apportées par la réaction seront notées au fur et à mesure que nous les rencontrerons.

Nous déterminerons encore la perturbation apportée à l'oscillation théorique par une impulsion élémentaire engendrée dans r. Le raisonnement sera ensuite étendu au cas où les chocs sont très nombreux et répartis au hasard dans le temps.

A. Influence d'une impulsion élémentaire sur l'oscillation idéale non entachée de bruit. — *a. Étude directe de l'excitation par un choc.* — *α. Le choc est produit pendant la phase d'amorçage des oscillations, approximation linéaire.* — Nous avons vu que, lorsque les oscillations s'amorcent,

le régime transitoire entaché de bruit qui prend naissance peut être décrit avec une bonne approximation par l'équation linéaire :

$$(\text{II}.9)\qquad LC\frac{d^2 I}{dt^2}+(Ms+rC)\frac{dI}{dt}+V=E(t).$$

Le terme résistant $Ms+rC$ est négatif. L'oscillation, en l'absence d'impulsions perturbatrices $[E(t)=0]$, a donc une amplitude qui croît exponentiellement avec le temps. La constante de temps de l'exponentielle étant

$$\tau=\frac{-2LC}{Ms+rC},$$

nous représenterons cette oscillation théorique par

$$V(t)=a_0\,e^{\frac{t}{\tau}}\sin\omega_0 t.$$

Nous exprimerons l'effet d'un choc isolé en remplaçant la fonction du second membre de l'équation (II.9) par l'impulsion naturelle $G(t-t_j)$, infligée à l'instant t_j. Les modifications d'amplitude Δa et de phase $\Delta\varphi$ qu'elle produit, à cet instant, sont encore obtenues en exprimant la discontinuité de $\frac{dI}{dt}$. V restant inchangé.

On trouve toujours, à une approximation du premier ordre (bruit faible)

$$\Delta a=\quad q\omega_0\cos\omega_0 t_j,$$
$$a\,\Delta\varphi=-q\omega_0\sin\omega_0 t_j.$$

[a, amplitude d'oscillation juste avant le choc; q, échelon de $G\,(t-t_j)$].

La fréquence n'est pas affectée, puisqu'elle est rigidement liée aux paramètres qui déterminent le circuit.

Ces modifications instantanées d'amplitude et de phase Δa et $\Delta\varphi$, et leur évolution ultérieure, résultent encore de l'addition, à l'oscillation idéale non entachée de bruit, d'une oscillation de perturbation $v\,(t)$:

L'oscillation théorique et son terme de perturbation $v\,(t)$ sont respectivement une solution de l'équation (II.9) sans second membre, et la solution forcée avec second membre.

On détermine facilement cette dernière dont l'amplitude croît exponentiellement, suivant la même loi que celle de $V\,(t)$, à partir de la valeur initiale $q\omega_0$

$$v(t)=q\omega_0\,e^{\frac{t-t_j}{\tau}}\sin\omega_0(t-t_j),\qquad \text{avec}\quad \tau=\frac{-2LC}{Ms+rC}.$$

Les deux oscillations sont représentées sur la figure 17 que l'on comparera avec la figure 7 du paragraphe I.B.a, remarque 2.

Si nous décomposons le choc élémentaire naturel $G\,(t-t_j)$ en son « composant watté » et son « composant déwatté », nous devons aussi décomposer l'oscillation forcée élémentaire $v\,(t)$ précédente en une « oscillation élémentaire wattée » et une « oscillation élémentaire déwattée » représentées sur la figure 18.

Les deux oscillations composantes, ainsi que

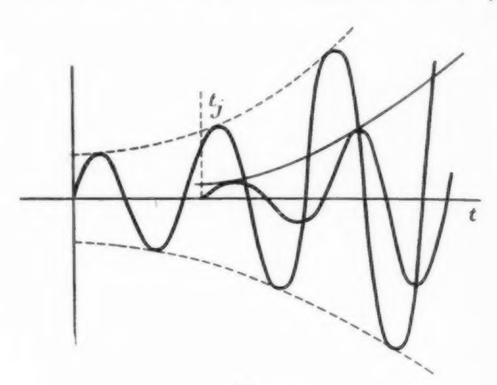


Fig. 17.

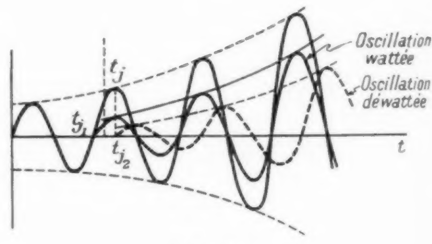


Fig. 18.

l'oscillation résultante $v\,(t)$ liée au choc naturel sont encore du même type. Ce sont des oscillations à croissance exponentielle, de même constante de temps et de même pseudo-période que l'oscillation du régime non perturbé.

Ce caractère est propre à tous les oscillateurs linéaires, amortis ou auto-entretenus : *les oscillations de réponse, wattée et déwattée, sont identiques.*

β. *La perturbation du régime stabilisé théorique.* — Lorsque l'amplitude est stabilisée en l'absence de bruit, l'oscillation est sensiblement sinusoïdale. Comme dans le cas pseudo-sinusoïdal précédent, un choc électronique produit une petite modification de cette amplitude en même temps qu'un petit déphasage.

Une différence importante se présente avec le

cas du paragraphe précédent lorsqu'on suit l'évolution ultérieure des deux petites perturbations d'amplitude et de phase. Nous allons voir, en effet, que les lois qui les régissent ne sont plus identiques.

De plus, un phénomène d'un type nouveau apparaît :

La fréquence n'est plus uniquement liée aux données du circuit, elle dépend généralement de l'amplitude d'oscillation.

Nous sommes en présence d'une loi devenue familière lorsqu'on considère un pendule grave. La fréquence, indépendante de l'amplitude lorsque ce dernier fonctionne dans des conditions à peu près linéaires, devient dépendante de l'amplitude lorsque intervient la non-linéarité de l'équation d'oscillation.

Un choc naturel élémentaire, altérant l'amplitude, altérera donc corrélativement la fréquence.

Les trois modifications fondamentales apportées au régime par ce choc sont en définitive :

1° Un déphasage, que l'on peut représenter par une petite translation de la sinusoïde des temps parallèlement à l'axe des temps Ot;

2° Une variation d'amplitude, représentée par une petite dilatation de cette sinusoïde perpendiculairement à Ot;

3° Une variation de fréquence, représentée par une petite dilatation des arcs de sinusoïde parallèlement à Ot.

La perturbation du régime sera donc connue lorsqu'on aura déterminé, d'une part ces trois modifications fondamentales à l'instant t_j du choc, d'autre part leurs lois d'évolution après le choc.

Nous simplifierons considérablement l'étude en partant d'un système non linéaire privilégié, pour lequel la fréquence sera indépendante de l'amplitude. Nous n'aurons alors à considérer que les fluctuations d'amplitude et de phase, réservant pour plus tard l'examen des effets de la dépendance fréquence-amplitude. Ce cas n'est pas purement idéal, nous verrons, en effet, que les fréquences des oscillateurs réels ne sont pas sensibles au même degré aux variations d'amplitude. Nous vérifierons sans peine que l'oscillateur choisi pour type au début répond assez bien à notre condition.

Effet du choc naturel et de ses composants watté et déwatté. — Représentons l'oscillation stabilisée théorique par la sinusoïde

$$V = a \sin \omega_0 t.$$

Il est facile de voir que les variations d'amplitude et de phase, Δa et $\Delta\varphi$, apportées à ce régime idéal par une impulsion naturelle isolée, sont encore données par :

$$\Delta a = \quad q\omega_0 \cos \omega_0 t_j,$$

$$\Delta\varphi = -\frac{q\omega_0}{a} \sin \omega_0 t_j$$

au premier ordre près.

Avant le choc, le gain du circuit est, en moyenne (pour une oscillation complète), égal à 1. La modification de l'amplitude Δa fait varier ce gain qui peut prendre, suivant la façon dont est appliqué le choc (instant t_j et signe de q), une valeur supérieure ou inférieure à 1. Dans les deux cas, le système stabilisateur (ici la courbure de la caractéristique) ramène sa valeur à l'unité.

Il en résulte un retour à la stabilisation, soit par croissance, soit par décroissance exponentielle de l'amplitude.

Le déphasage, lui, se maintient éternellement puisque sa présence revient à changer, dans l'équation d'oscillation, l'origine des temps arbitrairement choisie.

Remplaçons le choc naturel par ses composants watté et déwatté dont les définitions, données antérieurement en prenant pour exemple l'action du choc naturel sur un système linéaire, restent valables ici.

Le choc watté ne produit aucun déphasage, mais simplement une modification instantanée de l'amplitude, de valeur

$$\Delta a = q\omega_0 \cos \omega_0 t_j.$$

Cette perturbation décroîtra ensuite exponentiellement avec le temps, le système tendant à nouveau vers le régime stable.

Le choc déwatté a pour seul effet un déphasage de valeur

$$\Delta\varphi = -\frac{q\omega_0}{a} \sin \omega_0 t_j.$$

Ce déphasage, invariable ensuite au cours du temps, décale rigidement la sinusoïde des temps parallèlement à Ot.

Il est facile de traduire ces résultats sous une forme analogue à celle que nous avons adoptée dans le cas pseudo-sinusoïdal de l'amorçage :

L'oscillation du système, après le choc petit appliqué à l'instant t_j, est obtenue en superposant à la sinusoïde théorique :

— Une sinusoïde amortie, en phase avec elle, représentant l'effet du choc watté (sa constante de temps sera déterminée plus loin);

— Une sinusoïde vraie, en quadrature avec la

sinusoïde théorique, représentant l'effet du choc déwatté.

Elles sont représentées toutes deux sur la figure 19 que l'on comparera aux figures 8 et 18.

Les oscillations wattée et déwattée ne sont plus identiques. La non-linéarité a introduit une dissymétrie dans la réponse du système à un choc naturel.

Si nous suivons l'évolution continue de l'oscillateur, dans son passage de l'amorçage à la stabilisation, nous voyons que l'oscillation wattée, dont l'amplitude allait en croissant dans la phase transitoire, est étouffée dès que le régime stable est atteint.

L'oscillation déwattée, au contraire, se stabilise en amplitude en même temps que le signal théorique.

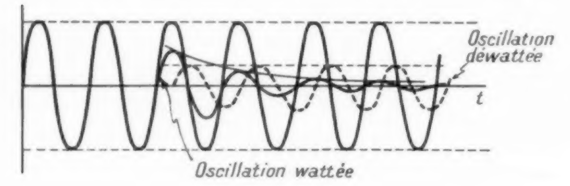


Fig. 19.

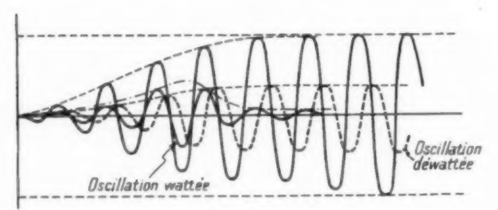


Fig. 20.

b. « Oscillation paire » et « oscillation impaire ». Emploi de la méthode de Rice. — Nous allons retrouver les conclusions du paragraphe précédent en décomposant cette fois l'impulsion donnée, suivant la méthode de Rice (chap. I, § A.*d*), en une « impulsion paire » et une « impulsion impaire ». Il pourrait sembler inutile de recommencer l'étude par ce moyen, puisque nous avons constaté déjà l'identité au premier ordre de « l'impulsion paire » et de « l'impulsion wattée », ainsi que de « l'impulsion impaire ». et de « l'impulsion déwattée » (chap. I, § B.*d*)

La décomposition que nous allons maintenant utiliser se réduit donc à la précédente. Cependant, la solution que nous donnerons sera très différente. Elle aura l'avantage d'apporter plus de rigueur à certains points de l'exposé. Elle permettra le calcul de la constante de temps du pendule amorti équivalent et conduira à une généralisation rapide et simple lorsque le choc unique sera remplacé par un oscillogramme de bruit.

Nous n'étudierons plus dans la suite la phase d'établissement du régime qui ne nous a servi qu'à suivre le passage continu d'un état quasi-linéaire à l'état non linéaire stabilisé.

L'équation générale des oscillations avec bruit ayant été mise sous la forme :

$$\frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2)\frac{dV}{dt} + V = E(t),$$

nous remplacerons d'abord comme plus haut la fonction du second membre par l'impulsion originelle $G(t - t_j)$ appliquée à l'instant t_j.

Nous décomposerons ensuite $G(t - t_j)$ en sa partie paire $G_1(t - t_j)$ et sa partie impaire $G_2(t - t_j)$ (chap. I, § A.*d*).

Il est naturel d'employer une décomposition analogue pour caractériser *l'effet* du choc.

Cet effet a été réduit (chap. II, § 1.*b*) à l'addition, au régime idéal, d'un terme de perturbation $v(t)$ donné par l'équation :

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + [Ms + rC + 3MbV_s^2]\frac{dv}{dt} + \left[1 + 6MbV_s\frac{dV_s}{dt}\right]v = G(t - t_j).$$

(V_s, régime théorique exempt de bruit).

On décomposera maintenant $v(t)$ en sa partie paire et sa partie impaire. On posera donc :

$$v(t) = v_1 + v_2 = \xi(t)\cos\omega_0 t + \eta(t)\sin\omega_0 t.$$

Dans ces conditions, l'équation précédente est équivalente (si l'on ne tient pas compte des termes de pulsations $2\omega_0$, $3\omega_0$, ...) à (5)

$$\text{(II.10)} \quad \begin{aligned} & v_2'' + 4\varepsilon\omega_0[1 + \beta V_s(v_1 + v_2)]v_2' \\ & \quad + [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\beta V_s'(v_1 + v_2)]v_2 \\ & + v_1'' + 4\varepsilon\omega_0[\beta V_s(v_1 + v_2)]v_1' \\ & \quad + [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\beta V_s'(v_1 + v_2)]v_1 \\ & \quad = \omega_0^2 G_1(t - t_j) + \omega_0^2 G_2(t - t_j) \end{aligned}$$

où l'on a posé pour condenser l'écriture :

$$\text{(II.11)} \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\varepsilon\omega_0 = -\frac{Ms + rC}{LC}, \qquad \beta = -\frac{3Mb}{Ms + rC}, \\ & \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \end{aligned} \right.$$

(5) Un calcul plus complet faisant intervenir les termes du second ordre en v donnerait :

$$\text{(II.11)} \quad \begin{aligned} & v_2'' + 4\varepsilon\omega_0\left[1 + \beta V_s(v_1 + v_2) + \frac{\beta}{2}(v_1 + v_2)^2\right]v_2' \\ & \quad + [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\beta V_s'(v_1 + v_2)]v_2 \\ & + v_1'' + 4\varepsilon\omega_0\left[\beta V_s(v_1 + v_2) + \frac{\beta}{2}(v_1 + v_2)^2\right]v_1' \\ & \quad + [\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\beta V_s'(v_1 + v_2)]v_1 \\ & \quad = \omega_0^2 G_1(t - t_j) + \omega_0^2 G_2(t - t_j). \end{aligned}$$

Cette équation se sépare en deux équations distinctes :

$$\text{(II.12)}\quad \begin{cases} \text{Équation aux amplitudes :} \\ v_2'' + 4\xi\omega_0 v_2' + \omega_0^2 v_2 = \omega_0^2 G_1(t - t_j), \\ \text{Équation aux phases :} \\ v_1'' + \omega_0^2 v_1 = \omega_0^2 G_2(t - t_j). \end{cases}$$

On remarque alors que l'oscillateur garde indéfiniment la mémoire de la partie $G_2(t - t_j)$ du choc, tandis que $G_1(t - t_j)$ a, au contraire, un effet qui disparaît suivant une loi exponentielle de constante de temps

$$\tau = \frac{1}{2\xi\omega_0} = -\frac{LC}{Ms - rC}.$$

Si nous remplaçons, à une approximation du premier ordre (chap. I, § B. *d*) $G_1(t - t_j)$ et $G_2(t - t_j)$ par $G_1(t - t_{j_1})$ et $G_2(t - t_{j_2})$ (t_{j_1} et t_{j_2}, points d'élongation nulle et d'élongation maximum du signal théorique, les plus voisins de t_j), nous retrouvons les résultats mentionnés au paragraphe précédent :

L'oscillateur non linéaire se comporte;

Vis-à-vis de l'impulsion paire $G_1(t - t_{j_1})$, comme un pendule amorti de constante de temps $\tau = \frac{1}{2\xi\omega_0}$;

Vis-à-vis de l'impulsion impaire $G_2(t - t_{j_2})$, comme un pendule non amorti.

c. La perturbation du régime et le diagramme de Nyquist mobile. — Reportons-nous au diagramme de Nyquist mobile de l'oscillateur considéré (*fig.* 21).

Nous savons que, lorsque le régime est atteint, le diagramme passe par l'origine O, et que le gain de l'oscillateur vaut à ce moment l'unité.

Toute modification d'amplitude à partir de la valeur stabilisée a (produite, par exemple, par un choc) fait subir un déplacement à ce diagramme. Deux cas peuvent se présenter :

— Ou bien le diagramme perturbé enveloppe l'origine (courbe 1 de la figure) et le gain de l'oscillateur devient inférieur à 1;

— Ou bien le diagramme perturbé laisse l'origine à l'extérieur de sa boucle (courbe 2 de la figure) et le gain de l'oscillateur devient supérieur à 1.

L'oscillateur, déplacé de sa position d'équilibre, revient ensuite au régime. Son amplitude reprend la valeur stabilisée a suivant une loi exponentielle, décroissante ou croissante selon que l'amplitude perturbée est supérieure ou inférieure à a, et le diagramme correspondant reprend sa position initiale.

Le « point de fonctionnement » de l'oscillateur perturbé [1] ne coïncide évidemment plus avec l'origine O. Nous avons montré que la trajectoire qu'il décrit pendant le retour au régime est un petit segment de droite passant par O, trajectoire orthogonale du diagramme de Nyquist mobile.

Dans le premier cas, la « trajectoire de l'oscillateur » est AO (courbe 1 de la figure 21); dans le second cas, BO.

Cette représentation graphique ne rend aucun compte de la variation de phase du signal produite par le choc naturel et ne traduit donc que l'effet de la composante wattée (perturbation d'amplitude). Elle présente, cependant, un grand intérêt lorsqu'on ne se limite plus à l'exemple trop particulier que nous avons d'abord choisi (fréquence indépendante de l'amplitude). Elle permet, en effet, dans le cas général de suivre, sur la trajectoire AO

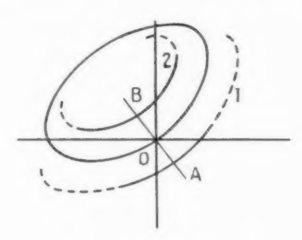


Fig. 21.

ou BO, la variation de fréquence liée à la variation d'amplitude [1].

Lorsque l'impulsion communiquée au circuit (supposé initialement au régime) est unique, comme nous l'avons supposé jusque-là, cette modification de fréquence est assez faible pour qu'il ne soit généralement pas nécessaire d'en tenir compte, au premier ordre.

Lorsque les impulsions sont nombreuses, il peut arriver que leurs actions soient de même sens et que l'effet résultant produise une modification *notable* de l'amplitude d'oscillation. La fréquence est alors suffisamment affectée pour qu'il soit nécessaire de considérer ses variations, ce que nous ferons plus loin.

B. Influence d'un oscillogramme de bruit sur l'oscillation idéale. — Les impulsions produites par la source de bruit sont très nombreuses, et réparties au hasard dans le temps. Nous évaluerons encore leur effet résultant en les remplaçant d'abord par deux suites distinctes :

D'une part, une succession de chocs wattés, d'échelons aléatoires, régulièrement répartis aux *points d'élongation nulle*, débuts de cycles d'un signal

sinusoïdal théorique représentant l'oscillation auto-entretenue non entachée de bruit;

D'autre part, une succession de chocs déwattés, d'échelons aléatoires, régulièrement répartis aux *points d'élongation maximum* du même signal.

Les perturbations d'amplitude et de phase, apportées à l'oscillation idéale, seront ainsi nettement séparées.

Si l'on s'intéresse seulement aux variations d'amplitude, on ne tiendra pas compte, *à une approximation du premier ordre*, des chocs déwattés.

Si les déphasages sont seuls considérés, on négligera de même la suite des chocs wattés.

Nous généraliserons aussi la méthode de Rice, ce qui nous permettra de compléter les résultats obtenus par l'emploi de la première méthode.

Aux fluctuations d'amplitude et de phase s'ajoutent d'ailleurs, comme nous l'avons vu, des fluctuations de fréquence (6). Ces dernières seront aisément reliées aux modifications d'amplitude connaissant la loi de dépendance fréquence-amplitude de l'oscillateur considéré.

Les méthodes précédentes, très commodes pour déterminer les propriétés statistiques des fluctuations d'amplitude, de phase et de fréquence, doivent cependant être reprises attentivement lorsqu'on veut calculer la puissance de bruit émise en même temps que le signal. Son évaluation met, en effet, en concurrence, avec les infiniment petits du premier ordre, des infiniment petits du second ordre dont les moyennes ne peuvent plus être négligées. L'approximation du premier ordre, valable lorsqu'on s'intéresse seulement aux déphasages, aux variations d'amplitude ou de fréquence, devient alors insuffisante, et il est indispensable de pousser les calculs jusqu'au second ordre.

L'étude complète de l'influence de la source de bruit sur l'oscillation idéale comprend donc nécessairement deux parties :

— D'une part, une approximation du premier ordre qui permet de préciser les lois statistiques auxquelles obéissent les fluctuations d'amplitude, de phase et de fréquence du signal;

— D'autre part, une approximation du second ordre qui renseigne sur le spectre de puissance et la puissance totale du bruit. [15]

Nous nous limiterons ici à la première partie de l'étude, réservant pour un exposé ultérieur la détermination du spectre de puissance et de la puissance totale du bruit.

a. Étude directe de l'excitation par chocs. Approximation du premier ordre. — *α. Fluctuations de l'amplitude du signal.* — Nous avons vu que si un choc électronique, considéré isolément, dérange l'oscillateur de son état de régime supposé atteint ce dernier tend à y revenir suivant une loi approximativement exponentielle. Nous supposerons que la constante de temps τ de l'exponentielle est très grande, c'est-à-dire que le système conserve longtemps (7) la mémoire du choc.

A chaque instant t, un très grand nombre de chocs antérieurs à t apportent ainsi une contribution notable au mouvement du système au voisinage de cet instant.

La perturbation locale produite par un choc

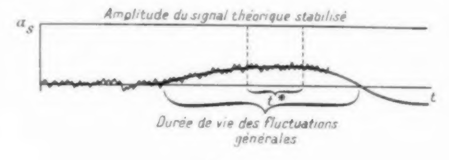


Fig. 22.

est donc très faible à côté de la perturbation due à l'ensemble de tous les chocs antérieurs; par suite, l'amplitude varie très lentement, à de petites fluctuations locales près.

Nous nous intéresserons aux *fluctuations générales*, celles produites par l'ensemble des chocs antérieurs à l'instant considéré, les *fluctuations locales* influant seulement sur la forme du spectre de puissance du bruit.

Ces deux types de fluctuations nous conduisent cependant à préciser d'abord ce que nous entendrons par « amplitude d'oscillation » :

Il s'agira de la valeur moyenne de l'amplitude instantanée prise sur un intervalle de temps t^*, faible à côté de la durée de vie moyenne des fluctuations générales (*fig.* 22). Ce laps de temps sera choisi, au contraire, très grand à côté de la largeur des fines dentelures locales.

En d'autres termes, la courbe qui décrira la variation générale de l'amplitude sera, à chaque instant, le courant direct de l'oscillogramme local.

L'étude des propriétés statistiques de l'ampli-

(6) Nous aurons à tenir compte, dans le paragraphe B, des variations de la fréquence avec l'amplitude, aussi désignerons par ω, la pulsation du régime stabilisé théorique et par ω_0 la pulsation à l'amorçage.

(7) Des valeurs numériques préciseront ce que nous entendons par « grande constante de temps ». Il s'agit évidemment d'une durée très supérieure à la période du signal théorique.

tude d'oscillation comprendra, d'une part la détermination du carré moyen de ses fluctuations générales (moyenne prise sur une durée aussi grande que possible), d'autre part la détermination de leur durée de vie moyenne.

Détermination du carré moyen des fluctuations générales d'amplitude. — Chaque impulsion naturelle sera remplacée, comme il a été dit, par le choc watté correspondant et nous déterminerons l'amplitude d'oscillation, à chaque instant, en tenant compte de tous les chocs wattés dont l'oscillateur aura gardé la mémoire.

Il suffira donc, pour obtenir l'amplitude résultante, de superposer au signal sinusoïdal théorique, les « oscillations de perturbation » élémentaires produites indépendamment par ces chocs wattés (*fig.* 19 et 23).

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent A, les oscillations de perturbation élémentaires sont exponentiellement amorties, en phase ou en opposition de phase avec le signal théorique. Elles sont très nombreuses et leurs amplitudes au départ sont évidemment aléatoires comme les chocs qui les engendrent.

On les a considérées comme la réponse aux chocs wattés d'un pendule amorti de pulsation ω_s (celle du signal théorique stabilisé), et de constante de temps τ (celle de retour au régime de l'oscillateur).

Le terme de perturbation d'amplitude résultant, qui s'ajoute au signal théorique, est donc le résultat de l'attaque de ce pendule amorti équivalent par la suite des chocs wattés.

L'amplitude de cette oscillation de bruit (comptée algébriquement) a une valeur moyenne nulle, puisque les échelons des chocs wattés agissants ont, comme ceux des chocs naturels, autant de chances d'être positifs que négatifs.

Le carré moyen de l'amplitude du pendule amorti équivalent est obtenu simplement par l'emploi des méthodes courantes. On trouve (appendice IV)

$$\overline{v^2(t)} = \frac{1}{4} n q^2 \omega_s^2 \tau. \qquad \text{(II.13)}$$

n, nombre moyen de chocs *naturels* par unité de temps;

q^2, carré moyen de l'échelon d'un choc naturel;

τ, constante de temps du pendule amorti équivalent;

ω_s, pulsation de l'oscillation idéale au régime.

Les grandeurs n et q^2 que nous utilisons ici ne sont pas directement accessibles expérimentalement. Il est facile cependant de les relier à la valeur r de la résistance génératrice de bruit, et à la température absolue T_k de cette résistance. Une théorie bien connue [2] montre, en effet, que l'on a :

$$n q^2 = 2 k T_k r,$$

k, constante de Boltzmann.

Le carré moyen de l'amplitude de bruit devient alors :

$$\overline{v^2(t)} = \frac{k T_k r}{2} \omega_s^2 \tau. \qquad \text{(II.14)}$$

Appliquons cette formule à l'oscillateur simple choisi précédemment comme exemple (chap II, § 1.*a*). Nous avons calculé plus haut sa constante de temps qui vaut :

$$\tau = -\frac{LC}{Ms + rC} = -\frac{1}{(Ms + rC)\omega_s^2}.$$

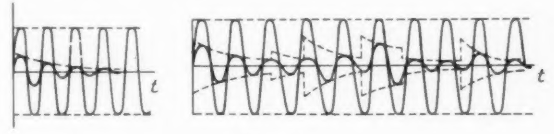


Fig. 23.

On en déduit la valeur de $\overline{v^2(t)}$

$$\overline{v^2(t)} = -\frac{k T_k r}{2(Ms + rC)}.$$

Si l'on fait intervenir dans cette relation la valeur a_s de l'amplitude stabilisée donnée par

$$a_s = 2\sqrt{-\frac{Ms + rC}{3Mb}},$$

on trouve :

$$\overline{v^2(t)} = -\frac{k T_k r}{2rC}\left[1 + \frac{4}{3}\frac{s}{b}\frac{1}{a_s^2}\right]. \qquad \text{(II.15)}$$

On vérifie aisément que $\frac{k T_k r}{rC}$ est le carré moyen de l'amplitude du circuit amorti classique non entretenu à résistance, self, capacité (r, L, C) attaqué par les chocs wattés précédents. La formule (II.15) montre que le bruit est d'autant plus intense que l'amplitude stabilisée est plus faible (8).

Applications. — 1er *exemple.* — Appliquons cette formule à un circuit oscillant (L, C, r) série *hypothétique* dont nous supposerons que les caractéristiques sont celles d'un quartz. Un tel circuit, irréalisable avec les selfs, capacités, résistances usuelles, sera une

(8) Ce résultat a été vérifié expérimentalement au Laboratoire de Radioélectricité de l'E. N. S. par M. Buyle-Bodin, agrégé de Physique.

image simplifiée du quartz de même qualité au voisinage de sa fréquence d'antirésonance.

Adoptons pour données [3]

$$
\begin{aligned}
C &= 0{,}018\ \text{pF},\\
r &= 400\ \Omega,\\
Q &= 58\,800,\\
\nu_s &= 389\ \text{kc/s},\\
T_k &= 300;
\end{aligned}
$$

s et b sont généralement du même ordre de grandeur. Par exemple, en prenant pour lampe d'entretien une 6 AK 5, un développement en série au voisinage du point de repos choisi a donné

$$\frac{s}{b} = -2{,}5.$$

On trouve alors :

$$\overline{v^2(t)} = 11{,}4 \cdot 10^{-8}\left(\frac{3{,}3}{a_s^2} - 1\right).$$

Fig. 23 *bis*.

Nous indiquons les valeurs de $\overline{v^2(t)}$, déduites de cette formule, correspondant aux amplitudes stabilisées, 1 et 0,1 V. Pour des amplitudes plus faibles, le bruit deviendrait important à côté du signal, ce qui serait contraire aux hypothèses de départ :

$$a_s = 1\ \text{V}, \qquad \overline{v^2(t)} = 26{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{V}^2,$$
$$a_s = 0{,}1\ \text{V}, \qquad \overline{v^2(t)} = 37{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{V}^2.$$

2e *exemple* [4]. — Avec les données suivantes :

$$
\begin{aligned}
C &= 0{,}05\ \text{pF},\\
r &= 30\ \Omega,\\
Q &= 1\,050\,000,\\
T_k &= 300.
\end{aligned}
$$

On trouve

$$\overline{v^2(t)} = 4 \cdot 10^{-8}\left(\frac{3{,}3}{a_s^2} - 1\right).$$

$$a_s = 1\ \text{V}, \qquad \overline{v^2(t)} = 9{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{V}^2,$$
$$a_s = 0{,}1\ \text{V}, \qquad \overline{v^2(t)} = 13{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{V}^2.$$

Vitesse d'évolution des fluctuations générales d'amplitude, intervalle de corrélation λ_0. — Nous supposerons toujours que l'on a suivi au cours du temps les fluctuations d'amplitude du signal et qu'on les a enregistrées sur un oscillogramme (*fig.* 24).

Négligeant encore les fines irrégularités locales,

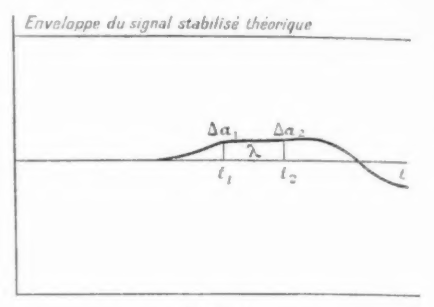


Fig. 24.

nous caractériserons la vitesse d'évolution des fluctuations générales d'amplitude par la largeur moyenne des grandes dentelures de cet oscillogramme (*fig.* 24). Plus cette largeur est dilatée, plus la vitesse d'évolution est faible.

Cette largeur moyenne sera remplacée, elle-même, pour la commodité des raisonnements, par l' « *intervalle de corrélation* » de l'oscillogramme :

Soient Δa_1 et Δa_2 les fluctuations d'amplitude, représentées sur le schéma, aux instants t_1 et t_2 (*fig.* 24); l'intervalle de corrélation λ_0 est l'intervalle limite $t_2 - t_1$ au delà duquel Δa_1 et Δa_2 ne sont plus corrélés.

En d'autres termes, si l'on désigne par $\overline{\varphi(\lambda)}$ la fonction de corrélation moyenne de l'oscillogramme, λ_0 est la plus petite valeur de λ au delà de laquelle $\overline{\varphi(\lambda)}$ est identiquement nulle.

Cette définition suppose *a priori* l'existence d'une telle valeur λ_0. Nous voyons intuitivement que l'existence de cette limite λ_0 tient à la durée finie de la mémoire du système.

La limite λ_0 est d'ailleurs liée, comme nous allons

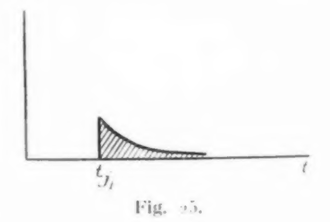


Fig. 25.

le voir, à la constitution ultime de l'oscillogramme de bruit (oscillogramme de la figure 24).

Pour simplifier, nous supposerons d'abord cet oscillogramme construit à partir de motifs élémen-

taires de durée bien définie. En fait, cette hypothèse devra être examinée avec soin :

L'oscillogramme que nous envisageons ici est évidemment l'enveloppe de l'oscillation du pendule amorti équivalent déjà introduit. Les motifs élémentaires qui le constituent sont, par suite, les enveloppes des oscillations élémentaires de réponse du pendule amorti aux chocs wattés individuels. Ce sont des portions d'exponentielles amorties, de valeurs au départ aléatoires (*fig.* 25). Leurs durées de vie sont théoriquement infinies, mais l'on peut admettre cependant que leurs contributions deviennent très vite nulles, et se ramener ainsi au cas plus simple pris comme point de départ.

Nous avons vu au chapitre I (§ 2.*h*) que $\overline{\psi(\lambda)}$ se déduit très simplement de la fonction de corrélation moyenne $\overline{\Psi(\lambda)}$ des motifs élémentaires qui constituent l'oscillogramme. On a :

$$\overline{\psi(\lambda)} = K\,\overline{\Psi(\lambda)} \qquad \text{(II.16)}$$

Fig. 26.

K, nombre moyen total des motifs élémentaires qui (constituent l'oscillogramme).

Cette égalité nous montre que $\overline{\psi(\lambda)}$ et $\overline{\Psi(\lambda)}$ ont même intervalle de corrélation. Or, il est facile de voir que l'intervalle de corrélation de $\overline{\Psi(\lambda)}$ se confond avec la durée de vie moyenne des motifs élémentaires (supposée finie); *par suite, λ_0 représente la durée de vie moyenne de ces motifs.*

L'emploi de la formule (II.16) nous conduit à représenter sur la figure 26 la fonction $\overline{\psi(\lambda)}$ dans le cas où les motifs élémentaires n'ont plus une durée finie, mais sont des portions d'exponentielles amorties analogues à celle de la figure 25.

La courbe obtenue est encore une portion d'exponentielle amortie de même constante de temps que les motifs originels. Nous voyons sur ce dessin qu'il n'existe pas, dans ce cas, en toute rigueur, d'intervalle λ_0.

On peut cependant en introduire un aisément, pour la commodité des calculs. Le problème est analogue à celui que l'on rencontre lorsqu'on veut définir la largeur d'une courbe en cloche.

Nous choisirons, par exemple, pour intervalle de corrélation moyen l'intervalle $\lambda_0 = \tau$ pour lequel $\overline{\psi(\lambda_0)}$ est égale à la valeur maximum $\overline{\psi(0)}$ divisée par e.

Pour l'oscillateur type, τ est donné par l'expression :

$$\tau = -\frac{1}{(Ms + rC)\omega_s^2}.$$

Si nous faisons encore intervenir l'amplitude stabilisée a_s, il vient :

$$\lambda_0 = \tau = -\frac{1}{rC\omega_s^2}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{s}{b}\frac{1}{a_s^2}\right)$$

ou

$$\lambda_0 = \tau = -\frac{Q}{\omega_s}\left(1 + \frac{4}{3}\frac{s}{b}\frac{1}{a_s^2}\right), \qquad \text{(II.17)}$$

Q, coefficient de surtension du circuit.

Applications. — 1er *exemple* [3]. — Avec

$$Q = 58\,800,$$
$$\nu_s = 389 \text{ kc/s},$$
$$\frac{s}{b} = -2,5.$$

on a

$$\tau = 0,02\left(\frac{3,3}{a_s^2} - 1\right).$$

D'où les valeurs suivantes de τ pour des amplitudes stabilisées décroissantes :

a_s (V).	τ (s).
1	0,04
0,1	6,6
0,01	660
0,001	$6,6.10^4$

Lorsque l'amplitude stabilisée devient très faible, τ prend rapidement de très grandes valeurs.

2e *exemple* [4]. — Avec

$$Q \sim 1\,000\,000,$$
$$\nu_s = 100 \text{ kc/s},$$

on trouve les valeurs suivantes :

a_s (V).	τ (s).
1	3,6
0,1	520
0,01	$0,5.10^5$
0,001	$0,5.10^7$

β. *Fluctuations de la phase du signal.* — Les fluctuations de phase ont, comme les fluctuations d'amplitude, un caractère local et un caractère général. Les propriétés statistiques de ce dernier seront déduites simplement de l'action des chocs déwattés élémentaires.

Comme nous l'avons précisé antérieurement (chap. II, § 2.A.a.β), chaque choc déwatté a pour effet d'ajouter au signal théorique une petite sinusoïde en quadrature, réponse d'un pendule non amorti à ce choc.

L'étude de l'évolution de la phase du signal présentera donc des points communs avec celle de l'évolution de l'amplitude. Elle s'en distinguera néanmoins par le fait que le pendule équivalent a, ici, une mémoire infinie. Par suite, le carré moyen des fluctuations de phase (moyenne prise sur un grand nombre d'expériences), comme le carré moyen de l'amplitude de ce pendule non amorti équivalent, ira en croissant avec le temps.

Le décalage moyen (avance ou retard) observé entre le signal réel et le signal théorique $a \sin \omega_0 t$ sera plus grand, par exemple, au bout d'un an qu'au bout d'un jour.

Les méthodes classiques, couramment employées pour déterminer les carrés moyens de fluctuations, donnent rapidement, comme au paragraphe précédent, le carré moyen de l'amplitude du pendule non amorti équivalent au bout du temps t^*. On trouve (appendice V) :

$$\text{(II.18)} \qquad \overline{v^2(t)} = \frac{1}{2} n q^2 \omega_s^2 t^*,$$

n, nombre moyen de *chocs naturels* par unité de temps;

q^2, carré moyen de l'échelon d'un choc naturel;

t^*, temps au bout duquel est calculé le carré moyen de l'amplitude du pendule non amorti équivalent;

ω_s, pulsation de l'oscillation idéale au régime.

On en déduit immédiatement la valeur du carré moyen de la fluctuation de phase au bout du temps t^*.

$$\overline{\Delta\Phi^2} = \frac{\overline{v^2(t)}}{a_s^2} = \frac{n q^2 \omega_s^2 t^*}{2 a_s^2},$$

a_s, amplitude de l'oscillation théorique au régime.

On exprimera encore les valeurs de n et de q^2 à partir de la résistance génératrice de bruit r, et de sa température absolue T_K, ce qui donne (avec $nq^2 = 2kT_K r$) :

$$\text{(II.19)} \qquad \overline{\Delta\Phi^2} = \frac{1}{a_s^2} k T_K r \omega_s^2 t^*.$$

Appliquons cette formule à l'oscillateur choisi comme exemple. On sait que la valeur théorique de son amplitude de régime, tout bruit mis à part, est

$$a_s = 2\sqrt{-\frac{Ms + rC}{3Mb}}$$

(la signification des lettres a été donnée au chapitre II, paragraphe 2.A.b). Portant cette valeur dans (II.19) il vient :

$$\overline{\Delta\Phi^2} = -\frac{3}{4}\,\frac{k T_K r \omega_s^2 t^* M b}{Ms + rC}.$$

b. « Oscillation de perturbation paire » et « oscillation de perturbation impaire ». Emploi de la méthode de Rice. — Il reste peu de choses à ajouter à la méthode développée plus haut (méthode de Rice, chap. II, § 2.A.b) pour la généraliser au cas où le choc isolé est remplacé par un oscillogramme de bruit. Il suffira, en effet, de nous reporter encore à l'équation générale des oscillations avec bruit (chap. II.1.a)

$$\frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2)\frac{dV}{dt} + V = E(t)$$

et de décomposer l'oscillogramme de bruit $E(t)$ en sa partie paire $E_1(t)$ et sa partie impaire $E_2(t)$.

Tous les calculs faits dans le cas d'un choc isolé restent valables et l'on aboutit, de même, aux deux équations distinctes :

$$\text{(II.20)} \qquad v_2'' + 4\xi\omega_0 v_2' + \omega_0^2 v_2 = \omega_0^2 E_1(t),$$

$$\text{(II.21)} \qquad v_1'' + \omega_0^2 v_1 = \omega_0^2 E_2(t),$$

où l'on a posé

$$2\xi\omega_0 = -\frac{Ms + rC}{LC}, \qquad \omega_s^2 = \frac{1}{LC}$$

qui traduisent respectivement les fluctuations d'amplitude et les fluctuations de phase du signal.

v_1 et v_2 représentent toujours les termes de perturbation pair et impair

$$v_1 = \xi(t)\cos\omega_0 t, \qquad v_2 = \eta(t)\sin\omega_0 t$$

qui s'ajoutent au signal théorique pur. Ces termes se confondent évidemment avec les oscillations des pendules équivalents, le premier amorti, le second non amorti, introduits aux paragraphes précédents.

Il est aisé de retrouver par cette méthode, la valeur du carré moyen de l'amplitude du pendule amorti équivalent (calculé plus haut par la méthode des chocs wattés), ainsi que celle du pendule non amorti.

c. Fluctuation de la fréquence du signal. Loi de dépendance fréquence-amplitude. — Le système garde assez longtemps la mémoire des chocs électroniques individuels pour que l'état d'oscillation dépende à chaque instant d'un très grand nombre de chocs antérieurs.

Nous avons vu qu'ainsi l'amplitude d'oscillation subit de lentes fluctuations générales et de petites

perturbations locales, à la cadence des chocs, d'importance négligeable à côté des premières.

Il est donc possible d'assimiler l'oscillation entachée de bruit, sur un intervalle de temps assez long (intervalle t^* de la figure 22, par exemple, à une portion de sinusoïde dont l'amplitude diffère de la valeur stabilisée a_s d'une faible quantité δa, aux petites irrégularités locales près.

Un état défini par l'amplitude $a_s + \delta a$ (aux fluctuations locales près), sera appelé « *niveau d'oscillation* ».

On sait que, pour les oscillateurs réels, chaque amplitude est caractérisée par une fréquence. Ainsi, tout écart d'amplitude avec l'amplitude de régime entraîne un écart de fréquence avec la fréquence de régime.

Aux fluctuations d'amplitude produites par le bruit correspondront, par suite, des fluctuations de fréquence que nous allons maintenant déterminer.

Notons d'abord que l'effet du bruit apparaît ici comme accessoire en ce sens que la dépendance fréquence-amplitude est une qualité intrinsèque de l'oscillateur.

Les fluctuations de fréquence d'un oscillateur seront avant tout liées à cette qualité, d'où la nécessité de préciser en premier lieu la forme de la loi de dépendance.

Ensuite seront envisagés les écarts dus au bruit.

Dans l'exemple simple choisi, l'équation d'oscillation où le bruit est supposé absent

$$LC\frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2)\frac{dV}{dt} + V = 0,$$

nous a conduit à la loi de dépendance fréquence-amplitude suivante [1] :

$$\nu = \nu_0\left[1 - \frac{(Ms + rC)^2}{8LC}\left(1 - \frac{a^2}{a_s^2}\right)^2\right],$$

ν, fréquence correspondant à l'amplitude a;

$\nu_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$;

a_s, amplitude du régime stabilisé.

Toute légère variation d'amplitude, à partir d'une valeur donnée a, entraîne donc la variation de fréquence

$$\Delta\nu = \nu_0\left(1 - \frac{a^2}{a_s^2}\right)\frac{(Ms + rC)^2}{4LC}\,\frac{\Delta(a^2)}{a_s^2}.$$

On voit que si l'écart d'amplitude est produit à partir de la valeur stabilisée a_s, $1 - \dfrac{a^2}{a_s^2}$ est nul ainsi que $\Delta\nu$.

L'oscillateur type se confond donc pratiquement avec l'oscillateur idéal pour lequel la fréquence reste rigoureusement insensible aux variations d'amplitude.

Il n'en est pas toujours ainsi. Il suffit, pour s'en assurer, de considérer l'oscillateur très simple qu'est un pendule grave *non amorti*, pour lequel l'équation d'oscillation bien connue est :

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgl\left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right)\theta = 0,$$

θ, angle de rotation;

I, moment d'inertie par rapport à l'axe d'oscillation;

m, masse du pendule;

l, distance du centre de gravité à l'axe d'oscillation;

g, accélération de la pesanteur.

On sait que la loi de dépendance fréquence-amplitude est alors :

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{\theta^2}{16}\right),$$

avec

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{I}}$$

et l'on voit tout de suite, en comparant cette loi à la précédente, que la fréquence de ce pendule est beaucoup plus sensible aux variations de l'amplitude que celle de l'oscillateur type.

En effet, à toute variation d'amplitude à partir de la valeur a_s correspond la variation de fréquence :

$$\Delta\nu = -\frac{\nu_0}{16}\Delta(a^2) = -\frac{\nu_0}{8}a_s\Delta a.$$

On trouve ici une variation de fréquence finie alors que, dans le cas précédent, l'écart de fréquence correspondant au même écart d'amplitude était nul.

La différence profonde entre les deux cas provient de ce que, pour l'oscillateur type, la non linéarité est introduite dans le terme résistant $\left(\text{coefficient de } \dfrac{dV}{dt}\right)$, tandis que, pour le pendule grave, la non linéarité est introduite dans le coefficient du dernier terme.

On est ainsi conduit à penser que la fréquence est beaucoup plus sous la dépendance de l'amplitude lorsqu'une légère non linéarité est introduite dans le coefficient du terme en V, que lorsqu'elle est introduite dans le coefficient du terme en $\dfrac{dV}{dt}$.

Cette propriété devient évidente si l'on ajoute à l'équation de l'oscillateur exempt de bruit un terme non linéaire μV^2, dans le coefficient de V.

Soit, par exemple,

$$\text{(II.22)} \qquad LC\frac{d^2V}{dt^2} + (Ms + rC + 3MbV^2)\frac{dV}{dt} + (1 + \mu V^2)V = 0$$

une telle loi d'oscillation. Il sera facile de trouver des exemples réels correspondant à ce cas. On pourra considérer, par exemple, que la réaction n'est pas, en pratique, un terme d'induction pure, mais qu'elle introduit un déphasage parasite. On passera ainsi de l'équation de départ à la nouvelle en remplaçant la mutuelle M par une mutuelle complexe.

On vérifie aisément que la fréquence est alors liée à l'amplitude par la relation :

$$\nu = \nu_0\left[1 + \frac{3\mu}{8}a^2 - \frac{(Ms + rC)^2}{8LC}\left(1 - \frac{a^2}{a_s^2}\right)^2\right].$$

La variation $\Delta\nu$, entraînée par une variation $\Delta(a^2)$ de a^2, est donnée par

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{3\mu}{8}\Delta(a^2) + \left(1 - \frac{a^2}{a_s^2}\right)\frac{(Ms + rC)^2}{4LC}\frac{\Delta(a^2)}{a_s^2}.$$

Si elle est produite à partir de l'état initial stabilisé, on doit remplacer a^2 par a_s^2 dans les coefficients de l'expression ci-dessus.

On trouve alors, puisque $1 - \frac{a^2}{a_s^2} = 0$:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{3\mu}{8}\Delta(a^2).$$

En conclusion, la loi de dépendance est réduite à la forme simple :

$$\text{(II.23)} \qquad \nu = \nu_0\left(1 + \frac{3\mu}{8}a^2\right).$$

Dans le cas du pendule grave, μ a la très forte valeur $-\frac{1}{6}$, ce qui rend la fréquence très sensible aux variations d'amplitude.

Loi de dépendance fréquence amplitude de l'oscillateur « circuit grille accordé-circuit plaque accordé ». — Nous allons évaluer μ en prenant pour exemple un oscillateur radioélectrique.

Abandonnant l'oscillateur type trop simplifié qui nous a servi jusque-là, nous le remplacerons par l'oscillateur à couplage capacitif grille-plaque de la figure 27. Ce montage est analogue à celui de l'oscillateur de Pierce. Il est, cependant, plus simple, aussi l'abordons-nous avant de passer au schéma de l'oscillateur à quartz.

Les notations que nous utiliserons sont indiquées sur la figure 27.

Il suffit, pour obtenir l'équation d'oscillation avec bruit, de se reporter à l'équation générale (II.2).

Les divers termes en sont aisément calculés :

On voit, en particulier, que le potentiel ramené par réaction sur la grille est :

$$\left\{\frac{Z_2}{Z_3}(1 + sZ_1)\right\}V.$$

- s, pente de la lampe au point de fonctionnement, variable avec l'élongation ($s = s_0 + bV^2$);
- Z_1, impédance, entre plaque et cathode, du circuit oscillant de plaque qui sert à obtenir l'accrochage par modification de la capacité variable C;
- Z_2, impédance, entre grille et cathode, du circuit oscillant de grille, à grand coefficient de surtension, qui impose à peu près sa fréquence;
- Z_3, impédance, entre grille et plaque, par l'intermédiaire de laquelle est régénérée l'énergie perdue.

Désignant par Z le coefficient de transfert du bruit, l'équation complète d'oscillation avec bruit devient :

$$\text{(II.24)} \qquad \left\{1 + \frac{Z_2}{Z_3}(1 + sZ_1)\right\}V = ZE.$$

Sous cette forme, elle restera valable pour l'oscillateur à quartz. Les valeurs de Z, Z_1, Z_2, Z_3, seront seulement plus compliquées que dans le cas envisagé en premier lieu (circuit oscillant série branché entre grille et cathode).

On a ici

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R + pL} + pC,$$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{R_1 + pL_1} + pC_1 = \frac{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + 1}{R_1 + pL_1},$$

$$\frac{1}{Z_3} = pC_3,$$

$$Z = \frac{1}{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + 1}.$$

Portant ces expressions dans l'équation (II.24), il vient :

$$\left\{1 + pC_3\frac{R_1 + pL_1}{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + 1}(1 + sZ_1)\right\}V = \frac{E}{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + 1}$$

ou, en chassant les dénominateurs,

$$\text{(II.25)} \qquad \{(p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + 1) + pC_3(R_1 + pL_1)(1 + sZ_1)\}V = E.$$

L'interprétation de cette équation est facile :

Pour $C_3 = 0$ (couplage nul), elle se réduit à l'équation linéaire suivante, représentant l'oscillation amortie, entachée de bruit, du circuit de grille :

$$\{ p^2 L_1 C_1 + p R_1 C_1 + 1 \} V = E.$$

On voit que la source de bruit agit directement.

Le terme $pC_3 (R_1 + pL_1)(1 + sZ_1)$ assure l'entretien, en ajoutant à R_1C_1 une résistance négative que nous allons déterminer. Ce terme influe aussi sur la fréquence en ajoutant à L_1C_1 un coefficient, variable avec l'amplitude d'oscillation.

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$Z_1 = r + pl,$$

l'équation (II.25) devient, après développement et regroupement des termes,

$$\text{(II.26)} \quad \{ p^3 C_3 L_1 ls + p^2 [L_1 C_1 + L_1 C_3 (1 + sr) + R_1 C_3 ls] + p [R_1 C_1 + R_1 C_3 (1 + sr)] + 1 \} V = E.$$

Nous plaçant dans les conditions où le circuit oscillant de grille impose à peu près sa fréquence propre ν_0, le premier membre de cette équation se ramène à un polynome du second degré en p, de la forme :

$$\{ p^2 [L_1 C_1 + L_1 C_3 + (L_1 C_3 r + R_1 C_3 l) s] + p [R_1 C_1 + R_1 C_3 (1 + sr) - L_1 C_3 ls\omega_0^2] + 1 \} V.$$

Nous voyons que la résistance négative introduite a pour valeur :

$$- L_1 \frac{C_3}{C_1} l \omega_0^2 s$$

et que, par suite, le couplage équivaut à une mutuelle induction fictive, de valeur

$$M = - L_1 C_3 \omega_0^2 l$$

ou, avec $\omega_0^2 \sim \frac{1}{L_1 C_1}$,

$$M = - \frac{C_3}{C_1} l.$$

On déterminerait aisément, à partir de cette mutuelle fictive :

L'amplitude stabilisée théorique lorsque le bruit est supposé absent;

La constante de temps de réaction à un choc, et la puissance de bruit qui s'ajoute au signal théorique, dans le cas réel où l'on tient compte de la source d'agitation thermique;

La loi de dépendance fréquence-amplitude sera obtenue, comme plus haut, à partir de l'équation simplifiée du régime théorique exempt de bruit :

$$\text{(II.27)} \quad \{ p^2 [L_1 C_1 + L_1 C_3 + C_3 (L_1 r + R_1 l) s] + 1 \} V = 0.$$

Il est facile de voir que $R_1 l$ est négligeable devant $L_1 r$ lorsque le circuit oscillant de plaque est accordé sur une fréquence voisine de la fréquence propre du circuit oscillant de grille, ce qui est toujours le cas.

Si nous supposons, de plus, que le couplage est lâche, et que l'on a $C_3 \ll C_1$, l'équation (II.27) devient

$$\{ p^2 [L_1 C_1 + C_3 L_1 rs] + 1 \} V = 0.$$

La loi de dépendance fréquence-amplitude s'en déduit. Tenant compte de la loi de variation de s

$$s = s_0 + b V^2,$$

on obtient

$$\nu = \nu_0 \left(1 - \frac{3}{8} \frac{C_3}{C_1} b r a^2 \right),$$

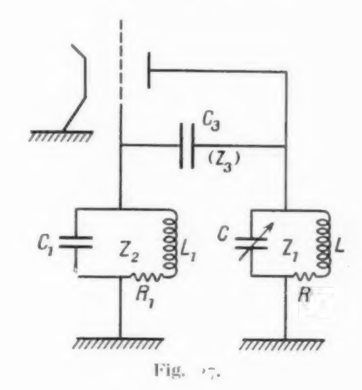


Fig. 27.

d'où

$$\mu = - \frac{C_3}{C_1} br.$$

Cette expression nous permet d'évaluer la variation de fréquence entraînée par la variation d'amplitude Δa, à partir de la valeur stabilisée théorique a_s. On a

$$\Delta\nu = - \nu_0 \frac{3}{4} \frac{C_3}{C_1} b r a_s \Delta a.$$

Une valeur moyenne des fluctuations de fréquence, résultant des fluctuations d'amplitude dues au bruit, sera obtenue en donnant à Δa la valeur $\sqrt{\overline{\overline{v^2(t)}}}$ déterminée précédemment.

[Nous rappelons que $\sqrt{\overline{\overline{v^2(t)}}}$ représente la racine du carré moyen du potentiel de bruit qui s'ajoute au signal théorique sur la grille. On a mis plus haut $\sqrt{\overline{\overline{v^2(t)}}}$ sous la forme :

$$\sqrt{\overline{\overline{v^2(t)}}} = \sqrt{- \frac{k T_k R_1}{2 R_1 C_1} \left(1 + \frac{4}{3} \frac{s}{b} \frac{1}{a_s^2} \right)} \,].$$

On en déduit la valeur de $a_s \Delta a$:

$$a_s \Delta a = \sqrt{-\frac{kT_K R_1}{2R_1C_1}\left(a_s^2 + \frac{4}{3}\frac{s}{b}\right)}$$

ou, en portant dans l'expression donnée plus haut,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = -\frac{3}{4}\frac{C_3}{C_1} br \sqrt{\frac{kT_K R_1}{2R_1C_1}\left[\left(-\frac{4}{3}\frac{s}{b}\right) - a_s^2\right]}.$$

Loi fréquence-amplitude de l'oscillateur de Pierce. — Nous passerons au cas plus compliqué de l'oscillateur à quartz de Pierce, représenté sur la figure 28, en remplaçant, dans l'équation (II.24), Z_1, Z_2, Z_3 par les nouvelles valeurs [5] données par :

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R + pL} + pC,$$

$$\frac{1}{Z_2} = \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{R_g} + pC_g,$$

avec :

$$\frac{1}{Z_c} = \frac{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + \alpha}{pL_1\gamma + R_1\gamma + \frac{\gamma}{p}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0 + C_1}\right)},$$

où l'on a posé :

$$\alpha = 1 + \frac{C_1}{C_0 + C_1} + \frac{C_1}{C_0}\frac{C_1}{C_0 + C_1},$$

$$\gamma = C_1\frac{C_0 + C_1}{C_0C_1};$$

$$\frac{1}{Z_3} = pC_3.$$

(Les notations sont indiquées sur la figure 28.)

Un calcul simple donne pour coefficient de transfert du bruit :

$$Z = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{pR_g}} \times \frac{1}{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + 1}.$$

L'équation complète d'oscillation avec bruit (II.24) devient donc :

$$\text{(II.28)}\quad \left\{1 + \frac{pC_3(1 + sZ_1) \times \left[pL_1\gamma + R_1\gamma + \frac{\gamma}{p}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0 + C_1}\right)\right]}{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + \alpha + \left(\frac{1}{R_g} + pC_g\right) \times \left[pL_1\gamma + R_1\gamma + \frac{\gamma}{p}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0 + C_1}\right)\right]}\right\} I = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{pR_g}} \times \frac{E}{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + 1}.$$

Il est plus difficile de mettre en évidence ici une résistance négative. On y parvient en multipliant les deux membres de l'équation (II.28) par

$$p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + \alpha.$$

Il vient :

$$\left\{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + \alpha + \frac{pC_3(1 + sZ_1)\left[pL_1\gamma + R_1\gamma + \frac{\gamma}{p}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0 + C_1}\right)\right]}{1 + \left(\frac{1}{R_g} + pC_g\right)\frac{\left[pL_1\gamma + R_1\gamma + \frac{\gamma}{p}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0 + C_1}\right)\right]}{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + \alpha}}\right\} I = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{pR_g}}\,\frac{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + \alpha}{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + 1} E.$$

Tenant compte de ce que α est très voisin de 1, et de ce que $\frac{1}{C_0 + C_1}$ est négligeable à côté de $\frac{1}{C_1}$

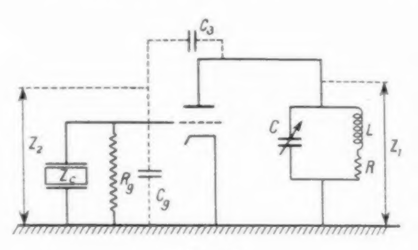


Fig. 28.

on simplifie l'équation précédente qui devient :

$$\left\{p^2L_1C_1 + pR_1C_1 + \alpha + \frac{pC_3(1 + sZ_1)\left[pL_1\gamma + R_1\gamma + \frac{\gamma}{pC_1}\right]}{1 + \left(\frac{1}{R_g} + pC_g\right)\frac{\gamma}{pC_1}}\right\} I = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{pR_g}} E.$$

Chassons le dénominateur $1 + \left(\frac{1}{R_g} + pC_g\right)\frac{\gamma}{pC_1}$. On obtient, après avoir ordonné les termes en p, et remplacé Z_1 par $r + pl$

$$\Big\{p^3sC_3L_1l\gamma + p^2 \times [L_1C_1 + L_1(C_3 + C_g)\gamma + L_1C_3rs\gamma + C_3R_1ls\gamma] + p\Big[R_1C_1 + R_1(C_3 + C_g)\gamma + R_1C_3rs\gamma + \frac{L_1}{R_g}\gamma + s\frac{C_3}{C_1}l\gamma\Big] + \left(\alpha + \frac{R_1}{R_g}\gamma + \frac{C_g + C_3}{C_1}\gamma + s\frac{C_3}{C_1}r\gamma\right) + \frac{1}{p}\frac{\gamma}{R_gC_1}\Big\} I = \frac{C_1}{(C_0 + C_g) + \frac{1}{pR_g}}\left[1 + \left(\frac{1}{R_g} + pC_g\right)\frac{\gamma}{pC_1}\right] E$$

Le quartz impose à l'oscillateur une fréquence

voisine de sa fréquence propre, et cela nous permet encore de ramener l'équation ci-dessus à une équation du second degré en p. Il vient :

$$\text{(II.29)}\quad \Big\{ p^2[L_1C_1 + L_1(C_3+C_g)\gamma + L_1C_3rs\gamma + lC_3R_1s\gamma] + p\Big[R_1C_1 + R_1(C_3+C_g)\gamma + R_1C_3rs\gamma - \frac{1}{R_gC_1\omega^2}(L_1C_1\omega^2-1)\gamma - (L_1C_1\omega^2-1)s\frac{C_3}{C_1}l\gamma\Big] + \alpha + \frac{R_1}{R_g}\gamma + \frac{C_3+C_g}{C_1}\gamma + s\frac{C_3}{C_1}r\gamma \Big\} V = \frac{C_1}{(C_0+C_g)+\frac{1}{pR_g}}\Big[1+\Big(\frac{1}{R_g}+pC_g\Big)\frac{\gamma}{pC_1}\Big]E.$$

Examinons d'abord le second membre de cette équation, on a

$$1+\Big(\frac{1}{R_g}+pC_g\Big)\frac{\gamma}{pC_1} = 1 + C_g\frac{C_0+C_4}{C_0C_4} + \frac{1}{pR_g}\frac{C_0+C_4}{C_0C_4} = \frac{C_0+C_4}{C_0C_4}\Big(\frac{C_0C_4}{C_0+C_4}+C_g+\frac{1}{pR_g}\Big).$$

C_4 est grand à côté de C_0 et, par suite, $\frac{C_0C_4}{C_0+C_4}$ est assez voisin de C_0 pour que l'on puisse remplacer l'expression finale entre parenthèses par

$$C_0+C_g+\frac{1}{pR_g}.$$

Le second membre de l'équation d'oscillation avec bruit devient donc

$$C_1\frac{C_0+C_4}{C_0C_4}E \sim \frac{C_1}{C_0}E.$$

Nous voyons que la source de bruit n'agit pas directement, la f. é. m. de bruit étant multipliée par le facteur de réduction $\frac{C_1}{C_0}$.

Ce résultat était à prévoir, car le circuit équivalent au quartz (*fig.* 29) est, de toute évidence, un diviseur capacitif de potentiel en alternatif. Le facteur de réduction $\frac{C_1}{C_0}$ agit, d'ailleurs, aussi sur l'amplitude du signal pour un couplage donné, mais, tandis que le bruit est imposé par la résistance génératrice, l'amplitude du signal peut être réglée à volonté en faisant varier le couplage.

Une légère réduction supplémentaire du bruit est apportée par la réaction comme on le voit en examinant le terme constant de l'équation d'oscillation (II.29) qui est différent de 1.

On retrouvera une équation avec terme constant unité (type auquel nous nous sommes toujours ramené antérieurement) en divisant les deux membres (donc la f. é. m. de bruit) par

$$\alpha + \frac{R_1}{R_g}\gamma + \frac{C_3+C_g}{C_1}\gamma + s\frac{C_3}{C_1}r\gamma.$$

Déterminons maintenant le coefficient de dépendance fréquence-amplitude de l'oscillation exempte de bruit.

On vérifie facilement à partir de (II.29) que l'équation de l'oscillation pure théorique, au voisinage de la stabilisation, est

$$\text{(II.30)}\quad \Big\{ p^2L_1C_1\Big(C_g+C_3+\frac{C_0C_4}{C_0+C_4}+C_3rs\Big) - \Big(C_g+C_3+\frac{C_0C_4}{C_0+C_4}+C_3rs\Big) + \Big(\frac{C_4}{C_0+C_4}\Big)^2C_1\Big\} V = 0.$$

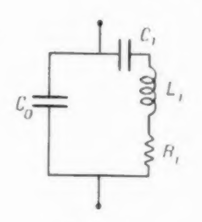


Fig. 29.

il suffit, pour l'obtenir, d'expliciter γ, et de tenir compte de ce que l'on a, à la fréquence d'oscillation [5] :

$$R_1 \ll \Big(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\Big).$$

La loi de dépendance fréquence-amplitude s'en déduit. On posera toujours

$$s = s_0 + bV^2,$$

ce qui permet de mettre l'équation aux pulsations sous la forme :

$$(1-L_1C_1\omega^2)\times\Big(C_g+C_3+\frac{C_0C_4}{C_0+C_4}+C_3rs_0+\frac{3}{4}C_3rba^2\Big) - \Big(\frac{C_4}{C_0+C_4}\Big)^2C_1 = 0;$$

on en tire :

$$\text{(II.31)}\quad \omega^2 = \frac{1}{L_1C_1}\times\left[1-\frac{\Big(\frac{C_4}{C_0+C_4}\Big)^2C_1}{\Big(C_g+C_3+\frac{C_0C_4}{C_0+C_4}+C_3rs_0+\frac{3}{4}C_3rba^2\Big)}\right].$$

On voit que la loi a, ici, une forme assez complexe. En particulier, elle ne se réduit pas à

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{3}{8}\mu a^2\right).$$

On peut, cependant, la ramener à ce type lorsque a est petit (par exemple $a < 1$ V pour les exemples que nous allons examiner) et l'écrire sous la forme :

$$(\text{II}.32)\quad \omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \times \left[1 - \frac{3}{8}\frac{C_1 C_3 r b}{\left(C_g - C_3 + \frac{C_0 C_4}{C_0 + C_4} - C_3 r s_0\right)^2} \times \left(\frac{C_4}{C_0 + C_4}\right)^2 a^2\right].$$

Applications. — *Premier exemple.* — Prenons comme premier exemple un oscillateur de Pierce décrit et étudié par P. Vigoureux et C. F. Booth [3], pour lequel les données sont les suivantes :

$C_1 = 0{,}018$ pF, $C_g = 6{,}4$ pF,
$C_0 = 9{,}6$ pF, $\frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{530}$,
$C_4 = 136$ pF,
$C_3 = 2{,}4$ pF, $R_1 = 400\ \Omega$.

La pente de la lampe d'entretien a pour valeur, au voisinage du point de repos

$$s_0 = 3{,}6 \cdot 10^{-4}\ \text{A/V}.$$

Le circuit de plaque est un circuit oscillant classique, dont la résistance série est de l'ordre de quelques ohms et le coefficient de surtension voisin de 150.

La partie réelle r de son impédance, entre les bornes plaque et cathode, est égale (puisqu'on fonctionne au voisinage de la résonance) à la valeur de la résistance série multipliée par le carré du coefficient de surtension. r est ainsi de l'ordre de $10^4\ \Omega$ (nous prendrons pour fixer les idées $r = 4 \cdot 10^4\ \Omega$).

Amplitude moyenne du terme de bruit. — Avec ces valeurs, l'équation d'oscillation avec bruit devient, au voisinage de la stabilisation théorique,

$$5{,}5\left(L_1 C_1 \frac{d^2 I}{dt^2} + I\right) = \frac{1}{530} E$$

(le facteur 5,5 est la valeur calculée de

$$2 + \frac{R_1}{R_g}\gamma + \frac{C_3 + C_g}{C_1}\gamma + s\frac{C_3}{C_1} r \gamma$$

en supposant que l'on a $R_g \gg R_1$).

On trouve alors, quand a_s varie, les valeurs suivantes correspondantes de $\sqrt{\overline{e^2(t)}}$ (racine du carré moyen du potentiel de bruit sur la grille)

(II.33)

a_s (V).	$\sqrt{\overline{e^2(t)}}$
1	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$
0,1	$2 \cdot 10^{-6}$
0,01	$2 \cdot 10^{-5}$
0,001	$2 \cdot 10^{-4}$

Coefficient de dépendance fréquence-amplitude. — La formule (II.23) exprimant la loi de dépendance fréquence-amplitude devient :

$$\nu = \nu_0\left(1 - \frac{3}{8} 2{,}2 \cdot 10^{-4} \frac{b}{s_0} a^2\right).$$

Le coefficient de dépendance μ vaut donc dans ce cas :

$$\mu = -2{,}2 \cdot 10^{-4} \frac{b}{s_0}.$$

Écart de fréquence produit par le bruit. — Une valeur moyenne de l'écart de fréquence produit par le bruit sera évaluée en prenant pour écart d'amplitude moyen la racine du carré moyen de la fluctuation d'amplitude :

$$\Delta a = \sqrt{\overline{(a - a_s)^2}} = \sqrt{\overline{e^2(t)}}.$$

L'écart de fréquence qui lui correspond, tiré de la relation (II.23) est

$$\Delta\nu = -\frac{3}{4}\nu_0 \mu a_s \Delta a.$$

Le tableau (II.33), donnant les valeurs de

$$\Delta a = \sqrt{\overline{e^2(t)}}$$

pour diverses valeurs de l'amplitude stabilisée a_s permet de déterminer les valeurs correspondantes de $\Delta\nu$ et de $\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$.

Les résultats sont rassemblés ci-dessous :

a_s (V).	Δa.	$a_s \Delta a$.	$\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$.
1	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$	$1{,}7 \cdot 10^{-7}$	$2{,}8 \cdot 10^{-11} \frac{b}{s_0}$
0,1	$2 \cdot 10^{-6}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$3{,}3 \cdot 10^{-11} \frac{b}{s_0}$
0,01	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	=
0,001	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-7}$	=

On vérifie que lorsque a_s est assez faible ($a_s \leq 0{,}1$ V), $\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$ est indépendant de l'amplitude stabilisée. b et s_0 étant toujours du même ordre, si l'on adopte

par exemple, la valeur utilisée plus haut $\left|\frac{b}{s_0}\right| = \frac{1}{2,5}$, on trouve :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 1,3.10^{-11}.$$

Deuxième exemple [4]. — Avec les données :

$$C_1 = 0,05\ \text{pF}, \qquad C_0 = 8\ \text{pF}, \qquad C_4 \gg C_0,$$

$$C_3 = 2,4\ \text{pF}, \qquad C_g = 6,4\ \text{pF}, \qquad \frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{160},$$

$$\nu_s = 100\ \text{kc/s}, \qquad R_1 = 30\ \Omega, \qquad T_k = 300,$$

$$s_0 = 3,6.10^{-3}, \qquad r = 4.10^{3}\ \Omega,$$

on trouve :

$$\mu = 6,5.10^{-4}\,\frac{b}{s_0}.$$

L'équation d'oscillation avec bruit, au voisinage de la stabilisation théorique est

$$6,4\left(L_1 C_1 \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}t^2} + 1\right) = \frac{1}{260}\,E.$$

On trouve quand a_s varie les valeurs suivantes de $\sqrt{\overline{e^2(t)}}$ et de $\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$.

a_s (V).	Δa.	$a_s\,\Delta a$.	$\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$.
1.......	$2,97.10^{-7}$	$2,97.10^{-7}$	$14,5\left\|\frac{b}{s_0}\right\|.10^{-11}$
0,1.....	$3,6.10^{-6}$	$3,6.10^{-7}$	$17,5\left\|\frac{b}{s_0}\right\|.10^{-11}$
0,01....	$3,6.10^{-5}$	–	–
0,001...	$3,6.10^{-4}$	–	–

avec

$$\left|\frac{b}{s_0}\right| = \frac{1}{2,5} \qquad \text{et} \qquad a_s \leq 0,1\ \text{V},$$

on trouve

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 7.10^{-11}.$$

d. Extension des résultats précédents à des caractéristiques renfermant des termes pairs. — Si les termes pairs de la caractéristique de la lampe d'entretien n'influent pratiquement pas sur l'effet direct du bruit, ils peuvent, cependant, modifier profondément la loi fréquence-amplitude.

Bien entendu, lorsque l'oscillateur ne possède pas de filtre d'enveloppe, les termes pairs de la caractéristique conduisent à des coefficients impairs de l'équation d'oscillation qui s'annulent en moyenne, sur chaque période. Si, au contraire, il existe un filtre d'enveloppe, la pente de la lampe peut être de la forme

$$s = s_0 + n_1 a + n_2 a^2.$$

On est alors conduit à remplacer la loi

$$\nu = \nu_0\left(1 + \frac{3}{8}\mu a^2\right)$$

par un développement limité en a plus général, tel que

$$\nu = \nu_0(1 + m_1 a + m_2 a^2).$$

Dans le cas d'un oscillateur de Pierce, par exemple, la loi de dépendance (II.31) devrait être écrite plus complètement :

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \times \left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{C_1}{C_g + C_3 + \dfrac{C_0 C_4}{C_0 + C_4} + C_3 r s}\left(\frac{C_4}{C_0 + C_4}\right)^2\right],$$

avec

$$s = f(a)$$

ou, si l'on pose

$$s = s_0 + n_1 a + n_2 a^2,$$

$$\omega \sim \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \times \left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{C_1 C_3 r n_1}{\left(C_g + C_3 + \dfrac{C_0 C_4}{C_0 - C_4} + C_3 r s_0\right)^2} \times \left(\frac{C_4}{C_0 + C_4}\right)^2 a - \frac{1}{2}\,\frac{C_1 C_3 r n_2}{\left(C_g + C_3 + \dfrac{C_0 C_4}{C_0 + C_4} + C_3 r s_0\right)^2} \times \left(\frac{C_4}{C_0 + C_4}\right)^2 a^2\right].$$

Il est bien difficile de préciser les valeurs de n_1 et n_2. Ces coefficients dépendent du type de lampe choisi et sont aussi sujets à variation pour les lampes d'un même type. Si nous envisageons, cependant, le cas extrême où n_1 et n_2 sont du même ordre et où m_1 et m_2 ont des valeurs voisines de la valeur μ calculée ci-dessus pour notre second exemple (quelques 10^{-4}), on trouve les valeurs suivantes de $\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$ pour divers régimes stabilisés :

a_s (V).	Δa.	$\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$.
1..........	$2,97.10^{-7}$	$5,94.10^{-11}$
0,1........	$3,6.10^{-6}$	$3,6.10^{-10}$
0,01.......	$3,6.10^{-5}$	$3,6.10^{-9}$
0,001......	$3,6.10^{-4}$	$3,6.10^{-8}$

avec

$$m_1 \sim m_2 \sim 10^{-4},$$

$$\nu = \nu_0 + 10^{-4} a + 10^{-4} a^2.$$

Nous voyons que, lorsque a_s décroît, $\frac{\Delta\nu}{\nu_0}$ croît rapidement. Cela provient de ce que l'on a :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = m_1\,\Delta a + 2\,m_2 a_s\,\Delta a.$$

On ne profite plus, aux faibles amplitudes, de la décroissance du coefficient $2m_2a_s$ et le terme $m_1\Delta a$ devient alors prépondérant.

Les valeurs numériques précédentes montrent que l'on a intérêt à éliminer les termes pairs des caractéristiques des systèmes stabilisateurs. On voit, que l'effet de ces termes devient rapidement « catastrophique » aux faibles amplitudes d'oscillation.

e. Comparaison avec l'erreur due aux fluctuations de phase. — Nous avons vu plus haut qu'aux fluctuations de fréquence dues à la dépendance fréquence-amplitude s'ajoutent des fluctuations de phase. On peut maintenant comparer numériquement les deux effets. Tandis que les variations de fréquence liées aux fluctuations d'amplitude se maintiennent pendant une durée très supérieure à la période moyenne, ces dernières perturbent beaucoup plus irrégulièrement la sinusoïde théorique, entraînant des modifications du pas variables d'un cycle à l'autre.

La formule (II.19), compte tenu du facteur de réduction $\frac{C_1}{C_0}$ introduit par le quartz et de l'atténuation légère du bruit due à la réaction, nous permet d'évaluer l'erreur sur la durée du cycle théorique entraînée par de tels déphasages. On trouve rapidement pour le deuxième exemple étudié ci-dessus :

a_s (V).	$\frac{\Delta T}{T_0}$.
1	10^{-10}
0,1	10^{-9}
0,01	10^{-8}
0,001	10^{-7}

Nous voyons que les fluctuations relatives de la fréquence *instantanée* produites par les effets déphaseurs sont très supérieures à celles produites par la dépendance fréquence-amplitude. Il semble donc, au premier abord, que ce phénomène limite la précision de la mesure et que les écarts de fréquence produits par l'instabilité de l'amplitude soient négligeables à côté de ces derniers.

Ce point de vue n'est cependant pas correct, car les déphasages d'un cycle au suivant sont non corrélés, si bien que l'erreur relative qu'ils entraînent sur la mesure d'une durée t^* décroît très rapidement quand t^* augmente. Par exemple, pour $t^* = 1$ s, on trouve

a_s (V).	$\frac{\Delta t^*}{t^*}$.
1	3.10^{-13}
0,1	3.10^{-12}
0,01	3.10^{-11}

Les méthodes qui permettent de déterminer les fluctuations relatives de fréquence de deux oscillateurs sur de courts intervalles de temps ne donnent jamais la différence des fréquences instantanées.

Si l'on prend comme exemple la méthode des battements, à laquelle se ramènent d'ailleurs la plupart des autres, la plus petite durée mesurée est la période du battement. Cette mesure, bien qu'elle soit effectuée pendant un court laps de temps, ne donne qu'une comparaison des valeurs moyennes des fréquences *pour cet intervalle de temps*. La durée de la mesure étant généralement supérieure à la seconde, on voit, d'après les valeurs du tableau précédent, que les erreurs dues aux fluctuations de phase deviennent négligeables.

f. Non isochronisme du quartz. Loi fréquence-amplitude du quartz non entretenu. — Une dernière question se pose, celle de l'isochronisme du quartz ou, autrement dit, de la dépendance fréquence-amplitude du quartz isolé de son circuit d'entretien. Il importe, en effet, de savoir si une variation donnée de l'amplitude d'oscillation du cristal ne produit pas une variation de fréquence plus importante que celle qui est due au circuit d'entretien.

Nous allons voir que, dans nombre de cas, cet effet, quoique très faible, doit être pris en considération. Notons que L. Essen attribue en partie la haute qualité de ses anneaux de quartz à un excellent isochronisme [6].

Empruntons quelques valeurs numériques à F. J. M. Laver [6], qui signale d'ailleurs que le phénomène n'a pas fait l'objet d'étude systématique. Les expériences ont porté sur un quartz type de 100 kc/s. La fréquence de résonance série décroît quand l'amplitude de vibration augmente.

Une variation d'amplitude de 10 % produit les variations relatives de fréquence suivantes :

a. 25.10^{-8} pour une plaque coupe G-T fixée par ressort;

b. 7.10^{-8} pour une plaque coupe G-T maintenue par fils soudés;

c. Moins de 10^{-8} pour un anneau d'Essen monté avec fils de soie.

L'étude théorique des fluctuations d'amplitude dues au bruit pour le quartz de 100 kc/s pris comme

exemple montre que, pour un régime stabilisé à 0,03 V, l'écart Δa est de 1,1.10^{-5}V. On a alors :

$$\frac{\Delta a}{a_s} = \frac{1,1}{3} \cdot 10^{-3},$$

ce qui donne :

Pour l'exemple a :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = 9.10^{-10} \sim 10^{-9};$$

Pour l'exemple b :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = 2,6.10^{-10};$$

Pour l'exemple c :

$$\frac{\Delta \nu}{\nu_0} = 0,4.10^{-10}.$$

On voit ainsi que l'influence d'un faible défaut d'isochronisme du quartz prend une importance extrême pour des amplitudes de régime aussi faibles (notons que l'on opère couramment de 0,03 à 0,05 V).

Il est intéressant de mentionner aussi l'influence du système de suspension du quartz sur son isochronisme.

9. Comparaison avec les résultats expérimentaux. — Parmi les horloges les plus parfaites utilisant le montage de Pierce se trouvent celles de la Physikalisch-Technische Reichsanstalt et du National Physical Laboratory.

Les premières utilisent des barreaux de quartz coupe-Y, de 9 cm de long environ, fonctionnant à 60 kc/s.

Le coefficient de température de la fréquence est très faible et peut atteindre 10^{-8} par 1°C dans la zone de température utilisée. La température du barreau de quartz est maintenue constante à ± 0,001°C. On voit donc que les fluctuations de fréquence produites par les variations de température du barreau ne peuvent excéder quelques 10^{-11}.

L'amplitude d'oscillation est choisie aussi faible que possible (la différence de potentiel aux bornes du quartz peut varier de 0,5 à 0,03 V environ), de façon à éviter les variations internes de la température du quartz, par suite des frottements moléculaires [7].

Cette condition atténue aussi les écarts de fréquence dus à des modifications irrégulières du circuit d'entretien, par exemple, ceux provenant des variations des tensions d'alimentation. De même, afin de réduire l'effet de ce circuit, on emploie des quartz ayant des coefficients de surtension aussi élevés que possible, de l'ordre de 10^{6}.

En résumé, on réduit le plus possible le couplage d'entretien.

Les résultats obtenus avant 1938 ont été publiés en détail [8], il en ressort que la comparaison de deux horloges de même type sur de faibles durées (de l'ordre de 1 h) montre des fluctuations de fréquence pouvant atteindre 8.10^{-10} (comparaison des horloges III et IV). Les résultats sont d'ailleurs très variables d'une horloge à l'autre.

Pour ce qui est des fluctuations quotidiennes, on peut admettre que ces dernières ne dépassent pas 3.10^{-9}.

Il est très difficile d'attribuer les fluctuations de fréquence à une cause bien définie et il est vraisemblable que de nombreux facteurs interviennent. Néanmoins, le parfait fonctionnement du thermostat semble éliminer, comme nous l'avons vu, l'hypothèse des fluctuations de température et, d'ailleurs, s'il n'en était pas ainsi, le cycle de chauffage (quelques secondes) apparaitrait nettement sur les graphiques.

Les valeurs numériques données par la théorie précédente (bruit de fond avec influence de la courbure de la caractéristique de l'organe stabilisateur, non isochronisme du quartz) conduisent à la plage d'erreur suivante pour le quartz de 100 kc/s étudié :

$$7.10^{-11} < \frac{\Delta \nu}{\nu_0} < 10^{-9}$$

pour $a_s = 0,03$ V, par exemple.

Elles montrent que l'influence de l'agitation électronique dans le quartz doit être prise en considération et peut, dans certains cas, jouer un rôle important. D'autant plus que, pour des valeurs de l'amplitude stabilisée aussi faibles que celles que l'on cherche à réaliser, en vue d'éliminer les causes de fluctuations liées au circuit extérieur, la mémoire τ de l'oscillateur est de l'ordre d'une fraction de journée (pour un quartz de coefficient de surtension $Q \simeq 10^6$) et que, par conséquent, les écarts sur les divers τ ne peuvent se compenser sur un jour suivant la loi des grands nombres.

Comme nous l'avons vu, l'effet du bruit est très variable avec les conditions expérimentales; aussi, loin de le considérer comme l'unique cause, nous voyons qu'il est bon, cependant, d'y prêter une extrême attention et de s'efforcer de le réduire le plus possible.

Au National Physical Laboratory, L. Essen a obtenu une grande stabilité de fréquence par l'emploi d'anneaux de quartz. Le coefficient de température de leur fréquence est très faible. L'obtention d'une stabilité de fréquence de ± 10^{-10} néces-

site une définition de leur température à $\pm 0{,}06^{o}$ C près [9]. L. Essen maintient cette température constante à $\pm 0{,}01^{o}$C, par conséquent, les variations thermiques du quartz ne peuvent conduire là encore à des fluctuations relatives de fréquence supérieures à $1{,}6.10^{-11}$.

Les fluctuations de fréquence, mises en évidence par la comparaison sur de courts intervalles de temps (de l'ordre de 1 h) de deux horloges de même type, atteignent cependant 4.10^{-10}, et restent inférieures à cette valeur.

Nous sommes encore dans la marge d'erreur possible due au bruit.

h. Les autres types d'oscillateurs. — On a cherché à modifier le circuit d'entretien de façon à rendre la fréquence du quartz moins tributaire de ce dernier.

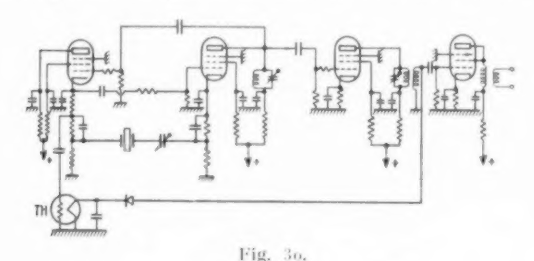


Fig. 30.

On a été ainsi amené à remplacer le montage de Pierce par des montages utilisant la résonance série du cristal.

Examinons rapidement l'un d'eux, parmi les plus soignés, celui du Laboratoire National de Radioélectricité, à Bagneux (⁹). Nous en donnons ci-dessus le schéma complet [10]. La description d'un oscillateur analogue a d'ailleurs été donnée par J. Verbaandert [7] qui met bien en lumière les remarquables qualités du montage.

Une théorie simplifiée est obtenue en le considérant comme un amplificateur refermé sur lui-même, le tube L_2, étant monté en « cathodyne » (2ᵉ étage amplificateur de gain G_2), et le tube L_1 commandé par la cathode (1ᵉʳ étage amplificateur de gain G_1). Nous ferons abstraction des dispositifs accessoires : contre-réaction, stabilisation par « thermistance », afin de ne pas trop compliquer les calculs. En fait, ces organes stabilisateurs limitent beaucoup l'influence sur le quartz des variations accidentelles du circuit d'entretien. Leur intérêt est donc très considérable à ce point de vue, néanmoins ils n'apportent pas de modification essentielle à la théorie.

On obtient facilement le schéma réduit équivalent à l'oscillateur simplifié de la figure 31 dans laquelle :

r_2, r_4, quelques dizaines d'ohms;
μ, coefficient d'amplification des lampes;
r_p, résistance intérieure des lampes $\sim 10^{6}\Omega$;
$\frac{\mu}{r_p} = 9.10^{-3}$ A/V.

L'équation d'oscillation avec bruit s'en déduit; indiquons-là sans entrer dans le détail des calculs : la méthode suivie pour y parvenir est analogue à celle qui a été développée à propos du montage de Pierce.

$$\left(p^2 L_1 C_1 \left[1 + \frac{C_0}{C_4} + \frac{R_1 C_0}{L_1}(r_2 + r_4) - \frac{R_1 C_0}{L_1} \frac{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right) G_1 r_2 r_4 + r_2^2}{\left(\frac{r_p}{1+\mu}\right) + r_1 + r_2} \right] + p R_1 C_1 \right.$$
$$\times \left\{ 1 + \frac{C_0}{C_4} + \frac{r_2 + r_4}{R_1} + \frac{C_0}{R_1 C_1}(r_2 + r_4)(1 - L_1 C_1 \omega^2) \right.$$
$$\left. \left. - \frac{1}{R_1 C_1} [C_1 + C_0(1 - L_1 C_1 \omega^2)] \frac{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right) G_1 r_2 r_4 + r_2^2}{\left(\frac{r_p}{1+\mu}\right) + r_1 + r_2} \right\} + 1 + \frac{C_0}{C_4} + \frac{C_1}{C_4} \right) I$$
$$= p C_1 r_4 G_1 \frac{\frac{r_p}{1+\mu} + r_1 + r_2 - \frac{r_2^2}{r_2 + r_4 + Z_e}}{\frac{r_p}{1+\mu} + r_1 + r_2} E.$$

On reconnaît, sur cette équation, le terme qui assure l'entretien :

$$-\frac{1}{R_1} \frac{\frac{\mu}{1+\mu} G_1 r_2 r_4 + r_2^2}{\frac{r_p}{1+\mu} + r_1 + r_2},$$

(⁹) Je remercie M. Decaux, Ingénieur en Chef du L. N. R. pour l'intéressante documentation en matière d'horloges radioélectriques dont il a bien voulu me faire profiter.

(on a, en effet, $1 - L_1 C_1 \omega^2 \sim 0$), ainsi que celui dont dépend la loi fréquence-amplitude :

$$-\frac{R_1 C_0}{L_1} \frac{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right) G_1 r_2 r_4 + r_2^2}{\left(\frac{r_p}{1+\mu}\right) + r_1 + r_2}.$$

Ce dernier a, ici, une valeur très faible; on trouve, avec les valeurs numériques indiquées sur le schéma :

$$+\frac{R_1 C_0}{L_1} \frac{\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right) G_1 r_2 r_4 + r_2^2}{\left(\frac{r_p}{1+\mu}\right) + r_1 + r_2} \sim 10^{-8}.$$

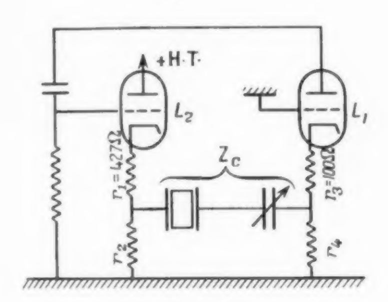


Fig. 31.

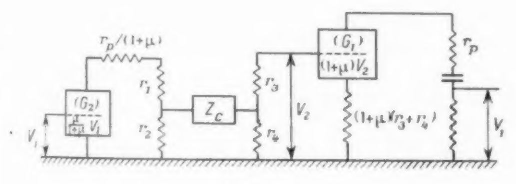


Fig. 32.

Il est donc négligeable, et l'on vérifie ainsi que ce type de montage est beaucoup plus avantageux, au point de vue du bruit, que celui de Pierce, pour lequel le terme parasite de couplage (celui dont dépend la loi fréquence-amplitude) valait :

$$\frac{C_1}{C_2 + C_3 + \frac{C_0 C_4}{C_0 + C_4} + C_2 r s} \left(\frac{C_4}{C_0 + C_4}\right)^2 \sim 10^{-3}.$$

Coefficient de transfert du bruit. — Le coefficient de transfert du bruit a une forme très différente de celui du montage de Pierce, et cela était à prévoir, puisque la capacité C_0, en parallèle, du circuit équivalent au quartz, joue ici un rôle bien minime. Son expression :

$$p C_1 r_4 G_1 \frac{\frac{r_p}{1+\mu} + r_1 + r_2 - \frac{r_2^2}{r_2 + r_4 + Z_c}}{\frac{r_p}{1+\mu} + r_1 + r_2}$$

peut être réduite en première approximation à $pC_1 r_4 G_1$ lorsque

$$\frac{\frac{r_p}{1+\mu} + r_1 + r_2 - \frac{r_2^2}{r_2 + r_4 + Z_c}}{\frac{r_p}{1+\mu} + r_1 + r_2}$$

est voisin de 1.

Son évaluation, avec les données numériques de la figure 31 nous conduit à :

$$p C_1 r_4 G_1 = j3.10^{-4},$$

valeur plus faible en module que celle obtenue pour l'oscillateur de Pierce, ce qui améliore la qualité de l'oscillateur au point de vue du bruit.

On en déduit comme plus haut, quand a_s varie, les différents Δa et l'on trouve :

a_s (V).	Δa.
1	$3,8.10^{-8}$
0,1	$4,6.10^{-7}$
0,01	$4,6.10^{-6}$
0,001	$4,6.10^{-5}$

On voit que l'effet du bruit sur le système est extrêmement réduit par un choix judicieux du montage d'entretien.

M. B. Decaux a eu l'extrême amabilité de me montrer de nombreux graphiques d'horloge; on voit qu'une variation d'amplitude de 20 % à partir du régime (0,03 V environ) conduit à une variation relative de fréquence de quelques 10^{-8}. Cela nous montre que l'écart

$$\frac{\Delta a}{a_s} = 0,5.10^{-4}$$

dû au bruit (valeur obtenue pour $a_s = 0,03$ V) ne peut entraîner qu'une fluctuation de fréquence de l'ordre de $0,5.10^{-11}$, et il semble que les fluctuations que l'on observe soient plutôt dues à une légère instabilité des tensions d'alimentation.

D'ailleurs, l'amplitude de régime semble agir fort peu sur les fluctuations observées, comme il ressort des graphiques.

i. Précision ultime des horloges radioélectriques. — Nous conclurons en examinant l'effet des fluctuations de fréquence précédentes, sur la mesure de longues durées (de l'ordre de 1 jour, par exemple). La mesure d'une durée nécessite le choix préalable d'un étalon de temps et il est bon, étant donné l'arbitraire de ce choix, de préciser ce que nous entendrons par là :

Le choix d'un étalon de temps se ramène toujours à celui d'un mécanisme à loi d'évolution *rigoureusement périodique*.

Par exemple, un système oscillant auto-entretenu semble, au premier abord, remplir cette condition. Si la loi du mouvement est rigoureusement sinusoïdale, on choisira pour durée étalon le temps qui sépare deux annulations successives de l'élongation.

Il suffira alors, pour mesurer une durée quelconque, de compter le nombre de zéros successifs de l'élongation du système de référence contenus dans la durée donnée.

Il est possible d'effectuer directement cette numération lorsque l'oscillation est lente (oscillation d'un pendule grave, par exemple), mais le procédé direct devient inutilisable lorsque l'oscillation est rapide. On doit alors le remplacer par des méthodes indirectes (méthode des battements, transformation de la sinusoïde en une succession d'impulsions équidistantes, etc.) *qui se ramènent toutes au premier procédé*.

Généralement, le nombre trouvé n'est pas un entier. Il en résulte, comme dans toute mesure, des erreurs dues ici à une mauvaise évaluation de la fraction de période excédentaire. Ces erreurs ont été considérablement réduites grâce au développement des techniques de comparaison des temps.

Un erreur beaucoup plus grave est celle qu'introduit la non périodicité rigoureuse du phénomène de base.

Il est, en effet, très difficile de définir avec précision ce que l'on entend par système « rigoureusement périodique ».

Le meilleur critère consiste à admettre la périodicité rigoureuse d'un système donné, et à mesurer avec cette horloge la durée de n périodes d'un autre système apparemment périodique. Si les résultats de nombreuses mesures présentent des fluctuations supérieures aux erreurs de comparaison tolérées, on pourra admettre que l'un des deux phénomènes n'est pas rigoureusement périodique.

C'est ce qui nous conduit à dire que les oscillateurs à quartz présentent des irrégularités de marche. La théorie du phénomène a mis en évidence des irrégularités de deux sortes :

a. Des dilatations ou des contractions aléatoires du pas de la sinusoïde des temps, non corrélées d'un cycle au suivant. Il s'agit, comme nous l'avons vu, de *fluctuations de phase*, qui se traduisent par des modifications de la pseudo-période instantanée et ont, par suite, même effet que des fluctuations de fréquence.

Sur une durée un peu longue, leur effet global est inobservable. Par exemple, l'imprécision qu'elles entraînent sur 1 s a été évaluée plus haut. Pour l'exemple choisi on a trouvé, avec une amplitude de régime de 1 V, $\Delta t = 3.10^{-13}$ s, et pour 0,01 V, 3.10^{-11} s. L'imprécision sur 1 jour pour le même exemple est de l'ordre de 10^{-10} s pour une amplitude de régime de 1 V, et de 10^{-8} s pour 0,01 V.

Si l'écart absolu croît avec le temps, la précision de la mesure, au contraire, décroît rapidement. Ainsi pour 1 s et pour $a_c = 1$ V, on a

$$\frac{\Delta t}{t} = 3.10^{-13},$$

tandis que, pour 1 jour, avec $a_c = 1$ V, on a

$$\frac{\Delta t}{t} = 10^{-15}$$

(c'est une conséquence de la loi des grands nombres).

b. Des dérives de fréquence de longue durée. Nous avons vu qu'avec les quartz à grande surtension utilisés actuellement, et pour des amplitudes d'oscillation très faibles (0,05 à 0,03 V), la durée de vie de ces dérives est de l'ordre de une à plusieurs heures.

De tels écarts ne se compensent évidemment plus suivant la loi des grands nombres. On pourra, au contraire, observer, au cours d'une journée, l'addition d'écarts de même sens.

Prenons un exemple : pour l'anneau d'Essen examiné plus haut, on a trouvé l'écart relatif moyen :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 7.10^{-11}.$$

La constante de temps de réaction aux chocs était de l'ordre de 1 h. Si deux ou trois écarts de même sens s'ajoutent, l'écart relatif devient :

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = 1.4.10^{-10} \quad \text{à} \quad 2.1.10^{-10},$$

ce qui conduit à un écart de marche diurne de

$$\pm\, 0.000\,02 \text{ s},$$

écart qui devient bien plus important lorsque s'ajoute un léger défaut d'isochronisme du quartz.

Pour fixer les idées, concluons en donnant une valeur expérimentale indiquée par A. Scheibe [8] :

L'écart de marche observé par comparaison des horloges III et IV de la P. T. R. pendant une observation de 12 h ne dépasse pas ± 0,000 08 s. Il peut être dû au bruit de fond introduit par le quartz.

j. Les horloges moléculaires. — Intérêt des vibrations moléculaires. — La fréquence des horloges à quartz, d'une grande constance sur les courts intervalles de temps, ne permet pas encore de définir

une base de temps de longue durée. Les quartz sont sujets à déformation, vieillissement, etc. et la précision qu'elles donnent est encore insuffisante pour qu'elles puissent supplanter les mesures astronomiques sur les longs intervalles de temps; elles permettent à peine l'étude des irrégularités de mouvement de la terre.

Il ne semble pas facile d'éliminer ces défauts et l'on a été amené à étudier un nouvel étalon de temps : une fréquence de rotation moléculaire, la fréquence 23 870,13 Mc/s de la molécule NH_3. Un tel étalon présenterait le gros avantage d'être constant dans le temps et indépendant des influences extérieures.

Si un tel choix est théoriquement simple, il pose aux techniciens des problèmes très compliqués, en particulier celui de la comparaison du « temps moléculaire » et du temps sidéral. Il nécessite l'emploi de klystrons, de durée de vie limitée et dont le bruit de fond est toujours très notable.

Les schémas de base. — Indiquons sommairement le schéma le plus couramment utilisé [11] ([10]).

L'oscillateur A (oscillateur à klystron) est modulé en fréquence et balaye une bande étroite centrée sur la raie 23 870,13 Mc/s. Toutes les fois que sa fréquence passe par cette valeur privilégiée, le gaz, contenu dans un guide d'ondes, présente une absorption maximum. Il en résulte, à la sortie du guide, une succession d'impulsions négatives.

On fait battre simultanément A avec un oscillateur B : la fréquence des battements, comme la fréquence de balayage de A, est variable; elle attaque un amplificateur à circuit accordé de fréquence ν_0.

Toutes les fois que la fréquence de battement

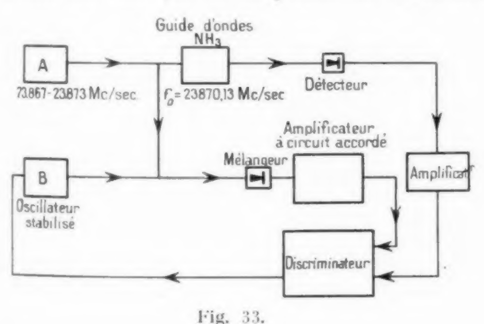


Fig. 33.

passe par la valeur ν_0, on obtient une impulsion à la sortie de l'amplificateur.

On obtient, en définitive, deux séries d'impulsions décalées l'une par rapport à l'autre, dont le décalage produit dans un discriminateur un courant correcteur qui sert à régler la fréquence de B.

On utilise aussi un autre dispositif, indiqué par R. V. Pound [12], pour synchroniser la fréquence de l'oscillateur B avec la raie de référence 23 870,13.

On produit toujours, grâce à un discriminateur,

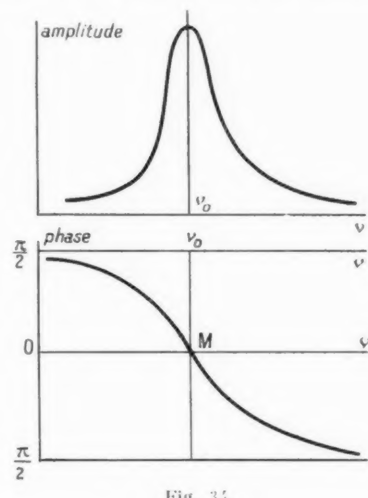


Fig. 34.

un courant correcteur proportionnel à la différence des fréquences de l'oscillateur et de la raie, que l'on applique à l'oscillateur B.

La loi exprimant le contrôle est :

$$S = \frac{\Delta f}{\delta f} = 1 + kG\rho.$$

S est le facteur de stabilisation;

Δf et δf, les écarts de fréquence initial et final;

ρ, le changement de fréquence produit par un voltage correcteur unité.

Comme on le sait, le principe des discriminateurs est généralement basé sur les courbes classiques de la figure 34 qui traduisent le comportement d'un circuit résonant (ici la cavité renfermant NH_3) sous l'effet de fréquences plus ou moins écartées de sa fréquence propre.

Comme le sens du courant correcteur doit dépendre du signe de l'écart, R. V. Pound utilise la deuxième courbe dans la région voisine de M (résonance et voisinage).

L'originalité de la méthode tient à l'emploi du T magique comme discriminateur en hyperfréquence. Signalons à cette occasion qu'un discriminateur basé sur le même principe a été décrit par G. Raoult à l'occasion du Colloque national A. M. P. E. R. E. du 24-27 février 1952.

([10]) Nous empruntons ce schéma à L. Essen [11].

Il serait long de décrire en détail cet intéressant dispositif, et cela sortirait du cadre de notre étude. Revenons donc, après ce court résumé des principes de base, au problème plus particulier, de l'influence du bruit de fond introduit par le klystron.

Équations de réglage. — Sans approfondir les calculs, il est visible que l'oscillateur est toujours régi par l'équation générale (II.2) où l'on ne tient d'abord pas compte du bruit introduit par les résistances

$$V + Zz\,f(V) = 0. \qquad \text{(II.2)}$$

V étant le potentiel rassembleur que nous prenons pour variable.

En effet, la théorie simplifiée de l'oscillateur klystron permet de le ramener au schéma suivant (*fig.* 35) où les deux cavités sont remplacées par des circuits oscillants classiques, et le coaxial (supposé

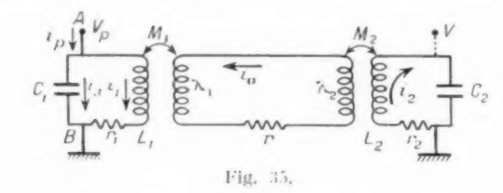


Fig. 35.

infiniment court) par les impédances mutuelles M_1 et M_2.

Pour expliciter l'équation (II.2), il nous reste à déterminer la tension $-Zz\,f(V)$ ramenée par réaction à l'entrée (ici le rassembleur). Rappelons que Z est le coefficient de transfert collecteur-rassembleur, et z l'impédance entre les bornes fictives A, B du collecteur.

Détermination de Zz. — Les équations de couplage entre les circuits oscillants de plaque et de grille sont, avec les notations indiquées sur le dessin :

$$\text{(II.34)} \quad \left[pL_1 + r_1 - p^2\frac{M_1^2}{r + p(\lambda_1 + \lambda_2)}\right] i_1 - p^2\frac{M_1 M_2}{r + (\lambda_1 + \lambda_2)p}\, i_2 = V_p,$$

$$\text{(II.35)} \quad \left[pL_2 + r_2 + \frac{1}{C_2 p} - p^2\frac{M_2^2}{r + p(\lambda_1 + \lambda_2)}\right] i_2 - p^2\frac{M_1 M_2}{r + (\lambda_1 + \lambda_2)p}\, i_1 = 0;$$

posant

$$\frac{1}{r + p(\lambda_1 + \lambda_2)} = \xi$$

et tenant compte de l'égalité

$$i_2 = pC_2 V,$$

l'élimination de i_1 entre les équations (II.34) et (II.35) donne :

$$V = \frac{p^3 M_1 M_2 C_1 \xi . V_p}{\left\{\begin{aligned} &(p^2 L_2 C_2 + pr_2 C_2 + 1 - p^3 M_2^2 C_2 \xi) \\ &\times (p^2 L_1 C_1 + pr_1 C_1 \qquad - p^3 M_1^2 C_1 \xi) \\ &\qquad - p^6 (M_1 M_2 \xi)^2 C_1 C_2 \end{aligned}\right\}}.$$

La valeur de Z, si l'on suppose un couplage lâche, c'est-à-dire M_1 et M_2 petits, est donc :

$$Z = \frac{p^3 M_1 M_2 \xi C_1}{(p^2 L_2 C_2 + pr_2 C_2 + 1)(p^2 L_1 C_1 + pr_1 C_1)};$$

dans ce cas (couplage lâche), z est aisément déterminé, on a :

$$z = \frac{r_1 + pL_1}{p^2 L_1 C_1 + pr_1 C_1 + 1},$$

on en tire l'expression de Zz

$$Zz = \frac{p^2 M_1 M_2 \xi}{(p^2 L_2 C_2 + pr_2 C_2 + 1)(p^2 L_1 C_1 + pr_1 C_1 + 1)},$$

si r est négligeable, ξ est imaginaire pur, Zz est de la forme :

$$Zz = \frac{pk}{(p^2 L_2 C_2 + pr_2 C_2 + 1)(p^2 L_1 C_1 + pr_1 C_1 + 1)} \qquad (k \text{ réel}).$$

Les courbes bien connues donnant la variation de la phase et de l'amplitude de $Zz = -\frac{V}{i_p}$ avec la fréquence (Harrison, *Klystron tubes*, p. 117, *fig.* 8-4) sont correctement représentées par cette expression. On voit que k doit être négatif.

Détermination de $i_p = f(V)$. — Si V est une sinusoïde pure, i_p est aussi une sinusoïde pure résultant du filtrage par la cavité collectrice du courant transporté par le faisceau électronique. Le remplacement de l'opérateur Zz par sa valeur complexe fonction de p sera donc valable quelle que soit l'amplitude du potentiel sinusoïdal appliqué au rassembleur, contrairement à ce qui a lieu dans le cas des oscillateurs à lampes. Dans ce dernier cas, en effet, à un potentiel sinusoïdal de grille de grande amplitude correspond un courant plaque qui n'est plus du tout sinusoïdal (de la forme $s_0 V + aV^2 + bV^3$).

Au potentiel rassembleur $V = Ae^{j\omega t}$ correspond, dans le collecteur, le courant

$$f(V) = i_p = y_{ms}\, 2\,\frac{J_1(x)}{x}\, e^{-j\varphi} V.$$

avec les notations classiques [13]

$$x = \frac{\beta\pi N}{E_0} A, \qquad \varphi = \tau + \frac{\pi}{2}, \qquad y_{ms} = \frac{\beta^2 \pi M_0}{E_0}.$$

Équation d'oscillation. — Si l'amplitude d'oscilla-

tion n'est pas trop grande, on peut remplacer $2\frac{J_1(x)}{x}$ par les premiers termes de son développement en série :

$$2\frac{J_1(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{8}.$$

L'équation d'oscillation s'écrit alors (en tenant compte de ce que A est une fonction de t lentement variable) :

$$\text{(II.36)} \quad (p^2 L_2 C_2 + p r_2 C_2 + 1)(p^2 L_1 C_1 + p r_1 C_1 + 1) V + k y_{ms}\, e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \left(1 - \frac{\beta^2 \pi^2 N^2}{8 E_0^2} A^2\right) p V = 0$$

$$(k < 0).$$

Cette équation, du quatrième degré en p, est plus compliquée que celles que nous avons rencontrées jusque-là, cependant il est encore possible de l'approcher par une équation du second degré. En effet, lorsque le collecteur est couplé au guide d'ondes qui contient NH_3, son coefficient de surtension est beaucoup plus faible que celui du rassembleur et l'on peut considérer que le rassembleur impose sa fréquence.

L'équation d'oscillation (II.36) est ainsi ramenée au type classique où la stabilisation est contrôlée par l'amplitude.

Remarquons que le coefficient du terme

$$\left(1 - \frac{\beta^2 \pi^2 N^2}{8 E_0^2} A^2\right) p V$$

est complexe $\left| k y_{ms}\, e^{-j\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} \right|$ et entraîne, par suite, une dépendance fréquence-amplitude dont la loi pourrait être déduite de la théorie générale.

Influence des sources de bruit. — Pour exprimer l'effet des sources de bruit, il reste encore à déterminer le second membre de l'équation (II.36) et à le mettre, conformément à la méthode générale, sous la forme

$$Z_1 E_1 + Z_2 E_2.$$

Les sources de bruit les plus importantes sont en évidence sur le schéma : ce sont les résistances fictives r_1 et r_2 des cavités, qui créent les f. é. m. aléatoires E_1 et E_2. Z_1 et Z_2 sont les coefficients de transfert du bruit, qu'il est possible de déterminer connaissant le tube oscillateur employé.

Nous voyons ainsi que l'oscillateur klystron employé dans les horloges moléculaires peut être étudié par les mêmes méthodes que les oscillateurs à quartz classiques, moyennant quelques hypothèses simplificatrices. Ayant indiqué la marche qu'il conviendrait de suivre, nous n'aborderons, cependant, pas ici le détail des calculs.

CONCLUSION.

L'objet de ce travail était d'étudier l'effet du bruit de fond sur le régime, et plus particulièrement sur la fréquence, d'auto-oscillateurs à lampes stabilisés en amplitude.

Après un bref rappel des méthodes classiques pour le cas linéaire, jai vérifié qu'il est légitime de négliger l'effet schottky des lampes d'entretien, ce qui a limité le problème à l'étude de l'influence de l'effet Johnson des circuits oscillants.

Le comportement de l'oscillateur perturbé par ce bruit est très complexe, car le système n'est plus régi par des lois linéaires. Les méthodes classiques, valables pour les oscillateurs linéaires étant inapplicables ici, il a été d'abord nécessaire de les modifier pour les adapter au cas envisagé. Il a été, d'ailleurs, commode de scinder la difficulté et d'envisager d'abord l'effet d'une impulsion électronique isolée :

L'action directe de cette dernière est double, et se réduit à une perturbation d'amplitude, ainsi qu'à un petit déphasage. On est alors amené, pour traduire simplement ce dédoublement de l'effet, à dédoubler aussi la cause et à rechercher deux composantes adéquates de l'impulsion originelle.

On y parvient, en particulier, grâce à une méthode due à S. O. Rice et il est facile ensuite de suivre, de façon séparée, la loi d'évolution du déphasage et la loi d'évolution de l'amplitude tributaires des deux composantes.

J'ai fait la théorie de ces deux effets, et j'ai montré que la non linéarité de l'oscillateur empêche de les ramener à une même loi, ce qui est le cas pour les oscillateurs linéaires traditionnels. Le passage au cas réel où les chocs sont très nombreux et répartis au hasard dans le temps conduit au même résultat, c'est-à-dire à deux lois bien distinctes : une loi aux phases, et une loi aux amplitudes.

La première loi exprime que le système garde indéfiniment la mémoire des petits déphasages imprimés par les chocs électroniques naturels. La deuxième exprime que toute petite perturbation d'amplitude doit s'amortir exponentiellement, avec une constante de temps caractéristique de l'oscillateur.

Si l'on porte son attention sur les petits déphasages aléatoires, l'on voit facilement que leur effet est le même que des variations de la fréquence instantanée. Effectivement, ils entraînent des dilatations ou des contractions aléatoires du pas de la sinusoïde du signal, variables d'un cycle à l'autre. Il est commode de comparer toujours cette pseudosinusoïde, dont le pas est localement déformé, à une sinusoïde théorique parfaite choisie pour repère. Supposant les deux courbes en coïncidence à l'ori-

gine des temps, on prend pour critère d'imperfection le décalage existant, à un instant t, entre un arceau de la sinusoïde déformée et l'arceau de même rang de la sinusoïde de base. Le carré moyen de cet écart est proportionnel au temps, il s'en suit que l'imprécision sur une durée t, entraînée par les petits déphasages, a une valeur relative décroissante quand la durée t augmente : l'effet global des déphasages élémentaires s'atténue sur de longues durées suivant la loi des grands nombres.

L'évaluation de l'effet des petits déphasages, en prenant pour exemple un oscillateur à quartz de 100 kc/s du type employé en horlogerie radioélectrique, montre qu'il est notable si on l'envisage localement. Les fluctuations relatives du pas du signal atteignent, en effet, quelques 10^{-8}. Cependant, l'effet global s'atténue très vite, et l'on vérifie qu'il est inobservable avec les moyens de mesure actuels.

Ce premier résultat conduit à examiner d'autres causes possibles de variation de la fréquence, et il apparaît qu'à l'effet direct précédent se superpose un effet « indirect » : la fréquence des oscillateurs réels est reliée à leur amplitude d'oscillation. Cette dépendance peut tenir au circuit d'entretien, elle peut aussi tenir aux qualités du cristal qui peut avoir, comme tout pendule matériel, un isochronisme imparfait. De toutes façons, les variations d'amplitude accidentelles, en particulier celles dues au bruit, doivent retentir sur la fréquence. Il ne reste plus qu'à évaluer numériquement l'importance de cette dépendance fréquence-amplitude.

Le premier montage pris comme exemple est celui d'un oscillateur de Pierce. Avec un anneau de quartz d'Essen de 100 kc/s, l'écart de fréquence moyen, lié aux fluctuations d'amplitude produites par le bruit, a une valeur théorique comprise entre 7.10^{-11} et 10^{-9}. Les mesures montrent des fluctuations de l'ordre de 4.10^{-10}; il est donc visible que l'effet du bruit donne une explication plausible des écarts observés dans les montages très soignés, où sont éliminées la plupart des causes externes de variation de la fréquence. Un autre exemple, fourni par un montage utilisé au Laboratoire National de Radioélectricité montre la possibilité de réduire de façon extrême les perturbations de fréquence apportées par le bruit.

Les méthodes utilisées sont aussi applicables à des oscillateurs basés sur des principes très différents de ceux des horloges à quartz, aux oscillateurs Klystrons, par exemple. Ces derniers sont employés dans les horloges moléculaires et la précision que l'on peut en attendre est encore très limitée, car ces tubes introduisent un bruit important.

APPENDICE I.

L'influence d'une impulsion sur l'oscillation du circuit de la figure 6 est traduite par l'équation :

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \frac{r}{L}\frac{dV}{dt} + \omega_0^2 = \omega_0^2 G(t - t_j)$$

avant l'instant t_j du choc, la variable V obéit à la loi pseudo-sinusoïdale :

$$V = a(t)\sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Si $a(t)$ est lentement variable $\frac{da}{dt}$ est négligeable et l'on a

$$\frac{dV}{dt} \simeq a\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi);$$

exprimons que le choc produit, à l'instant t_j, une discontinuité de la vitesse $\frac{dV}{dt}$ sans modification de V, on a

$$\Delta V = \{\Delta a \sin(\omega_0 t + \varphi) + a\,\Delta\varphi\cos(\omega_0 t + \varphi)\}_{t=t_j} = 0,$$

$$\Delta\left(\frac{dV}{dt}\right) = \{\omega_0\,\Delta a\cos(\omega_0 t + \varphi) - a\omega_0\,\Delta\varphi\sin(\omega_0 t + \varphi)\}_{t=t_j} = q\omega_0$$

(en désignant par q l'échelon $\int G(t - t_j)\,dt$) :

On en tire :

$$\Delta a = \quad q\omega_0\cos(\omega_0 t_j + \varphi),$$
$$a\,\Delta\varphi = -q\omega_0\sin(\omega_0 t_j + \varphi),$$

t_j désignant l'instant du choc.

Il peut être commode de supposer que l'on a $\varphi = 0$ avant le choc, les formules deviennent alors :

$$\Delta a = \quad q\omega_0\cos\omega_0 t_j,$$
$$a\,\Delta\varphi = -q\omega_0\sin\omega_0 t_j.$$

Ces expressions ne font pas intervenir l'amortissement du circuit, elles sont donc valables pour un amortissement nul, et aussi pour un circuit auto-entretenu, tant que l'oscillation est très peu relaxée et peut être assimilée à une sinusoïde pure:

APPENDICE II.

L'oscillation forcée d'un réseau linéaire attaqué par la f. é. m.

$$E = E_0\sin(2\pi\nu t + \varphi_0)$$

est donnée par l'équation générale [1] :

$$H_i(\nu)V = E_0\sin(2\pi\nu t + \varphi_0).$$

La solution cherchée est de la forme :

$$V = V_0 \sin(2\pi\nu t + \psi_0),$$

le remplacement des lignes trigonométriques réelles par des exponentielles complexes conduit à l'équation équivalente :

$$H_i(\nu)\, V_0\, e^{j\psi_0}\, e^{j2\pi\nu t} = E_0\, e^{j\varphi_0}\, e^{j2\pi\nu t}$$

ou

$$H_i(\nu)\, V_0\, e^{j\psi_0} = E_0\, e^{j\varphi_0},$$

expression qui exprime que $V_0 e^{j\psi_0}$ est le quotient des deux nombres complexes : $E_0 e^{j\varphi_0}$ et $H_i(\nu)$.

$E_0 e^{j\varphi_0}$ ayant pour image $m'(\nu)$ et $H_i(\nu)$ ayant pour image le point $m(\nu)$ du diagramme de Nyquist du réseau, nous voyons que $m''(\nu)$, image de $E_0 e^{j\varphi_0}$ se déduit de m' et m par la construction bien connue.

APEENDICE III.

$G_1(t - t_j)$ est de la forme :

$$G_1(t - t_j) = \sum_n C_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) \cos \omega_0 t,$$

avec

$$C_n = q\, \Delta\nu \cos 2\pi \nu_n t_j,$$

$$\Delta\nu = \frac{1}{T}, \qquad \omega_n = 2\pi \frac{n}{T}, \qquad \omega_0 = 2\pi \frac{n_0}{T} = \frac{1}{\sqrt{LC}};$$

prenons l'un des termes de cette somme :

$$C_n \cos(\omega_n t - \varphi_n) \cos \omega_0 t$$

et mettons-le sous la forme :

$$\frac{C_n}{2} \{ \cos[(\omega_0 + \omega_n) t - \varphi_n] + \cos[(\omega_0 - \omega_n) t + \varphi_n] \}.$$

L'équation :

$$LC \frac{d^2 V_1}{dt^2} + rC \frac{dV_1}{dt} + V_1 = G_1(t - t_j)$$

devient, lorsqu'on remplace $G_1(t - t_j)$ par le terme choisi :

$$LC \frac{d^2 V_1}{dt^2} + rC \frac{dV_1}{dt} + V_1 = \frac{C_n}{2} [\cos(\omega t - \varphi_n) + \cos(\omega' t + \varphi_n)];$$

en posant

$$\omega = \omega_0 + \omega_n, \qquad \omega' = \omega_0 - \omega_n,$$

on en tire, en supposant que ω_n reste petit, c'est-à-dire que le système a une faible largeur de bande (amortissement faible) :

$$V_1 = \frac{\omega_0 C_n}{2\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^4 + 4\omega_n^2}} \times [\cos(\omega t - \varphi_n + \psi_n) + \cos(\omega' t + \varphi_n + \psi'_n)],$$

ω et ω' étant deux valeurs symétriques par rapport à ω_0, on peut écrire :

$$\psi_n = -\frac{\pi}{2} - \varepsilon_n, \qquad \psi'_n = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon_n.$$

On a alors :

$$V_1 = \frac{\omega_0 C_n}{\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^4 + 4\omega_n^2}} \times \left[\cos\left(\frac{\omega + \omega'}{2} t - \frac{\pi}{2} \right) \cos\left(\frac{\omega - \omega'}{2} t - \varphi_n - \varepsilon_n \right) \right]$$

ou

$$V_1 = \frac{\omega_0 C_n}{\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^4 + 4\omega_n^2}} \cos(\omega_n t - \varphi_n - \varepsilon_n) \sin \omega_0 t.$$

Il ne reste plus qu'à sommer par rapport à l'indice n

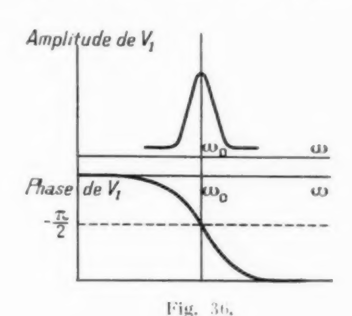


Fig. 36.

pour obtenir la solution générale avec $G_1(t - t_j)$ au second membre.

Cette solution est donc :

$$V_1 = \sin \omega_0 t \sum_n \frac{\omega_0 C_n}{\sqrt{r^2 C^2 \omega_0^4 + 4\omega_n^2}} \cos(\omega_n t - \varphi_n - \varepsilon_n);$$

elle est bien de la forme cherchée.

Le raisonnement est le même lorsque c'est $G_2(t - t_j)$ qui figure au second membre.

APPENDICE IV.

La variation d'amplitude élémentaire infligée au signal $a_s \sin(\omega_s t + \varphi)$ par un choc naturel isolé d'échelon q a été calculée plus haut; on a trouvé :

$$\Delta a = q\, \omega_s \cos(\omega_s t_j + \varphi).$$

On ne restreint pas la généralité des raisonnements en supposant que les chocs très nombreux produits par la source de bruit sont identiques et répartis au hasard. Les variations d'amplitude qu'ils produisent sont tantôt positives, tantôt négatives, et

leurs amortissements, après chaque impulsion, suivent une loi exponentielle.

La variation d'amplitude résultante :

$$\sum_{t_j} q\,\omega_s\, e^{-\frac{t-t_j}{\tau}} \cos(\omega_s t_j + \varphi)$$

a donc une moyenne nulle.

Si n est le nombre moyen de chocs naturels par unité de temps, le nombre total moyen de chocs de 0 à t^* est nt^*. Le carré moyen de la fluctuation d'amplitude résultante au bout du temps t^* est

$$\overline{V^2(t)} = nt^* q^2 \omega_s^2\, \overline{e^{-2\frac{t-t_j}{\tau}} \cos^2(\omega_s t_j + \varphi)}$$
$$= nt^* q^2 \omega_s^2 \frac{\tau}{4} \frac{1}{t^*} = \frac{1}{4} n q^2 \omega_s^2 \tau.$$

APPENDICE V.

Le déphasage élémentaire infligé au signal $a_s \sin(\omega_s t + \varphi)$ par un choc naturel isolé d'échelon q est, de même,

$$\Delta\varphi = -\frac{q\,\omega_s}{a_s} \sin(\omega_s t_j + \varphi).$$

Les déphasages produits par les nombreux chocs naturels sont tantôt positifs, tantôt négatifs, nuls en moyenne.

Le nombre total moyen de chocs de 0 à t^* étant nt^*, le carré moyen de la fluctuation de phase résultante au bout du temps t^* est

$$\overline{\Delta\Phi^2} = nt^* \left(\frac{q\,\omega_s}{a_s}\right)^2 \overline{\sin^2(\omega_s t_j + \varphi)} = \frac{1}{2} nt^* \frac{q^2 \omega_s^2}{a_s^2}.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] A. Blaquière, *Les oscillateurs non linéaires et le diagramme de Nyquist* (*J. Phys. Rad.*, 13, 1952, p. 527). *Ibid.*, p. 636.

[2] S. Goldman, *Frequency analysis, modulation and noise* (Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1948, p. 312-317).

[3] P. Vigoureux et C. F. Booth, *Quartz vibrators an their applications*, p. 67 (quartz n° 3) (London, his majesty's stationery office, 1950).

[4] P. Vigoureux et C. F. Booth, *Ibid.*, p. 130, table 12 (quartz type anneau d'Essen).

[5] Raymond A. Heising, *Quartz Crystals for electrical circuits, their Design and manufacture* (New-York, D. Van Nostrand Company, Inc, 1947, p. 356-410).

[6] L. Essen, *Frequency standardization* (*Proc. Inst. Electr. Eng.*, vol. 98, n° 62, 1951, p. 154). F. J. M. Laver, *Proc. Inst. Electr. Eng.*, vol. 98, n° 62, 1951, p. 169.

[7] J. Verbaandert, *L'horloge à quartz des laboratoires radioélectriques*. (*Ann. franç. Chron.*, 1952; Communications de l'Observatoire Royal de Belgique, n° 42).

[8] A. Scheibe, *Mesure du temps à la Physikalisch-Technische Reichsanstalt au moyen d'horloges à quartz*, (*Journées internationales de chronométrie et de métrologie*, juillet 1937, Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*, 1939).

[9] P. Vigoureux et C. F. Booth, *Quartz vibrators and their applications* (London, his majesty's stationery office, 1950, p. 328).

[10] B. Decaux, *Temps et Fréquence; Installation-de mesures du Laboratoire National de Radioélectricité* (*Journées internationales de chronométrie et de métrologie*, juillet 1937, Éditions de la *Revue d'Optique théorique et instrumentale*, 1939).

[11] L. Essen, *Frequency standardization* (*Proc. Inst. Electr. Eng.*, vol. 98, n° 62, p. 161-163).

[12] R. V. Pound, *Frequency stabilization of Microwave oscillators* (*Proc. Inst. Rad. Eng.*, 35, 1947, p. 1405).

[13] A. E. Harrison, *Klystron tubes* (New-York and London, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1947, p. 116-120).

[14] S. O. Rice, *Bell system Tech. J.*, july 1944.

[15] A. Blaquière, *C. R. Acad. Sc.*, 235, 1952, p. 1201; 233, 1951, p. 345; 233, 1951, p. 1434; 234, 1952, p. 419; 234, 1952, p. 710; 234, 1952, p. 1140.

[16] R. M. Lerner, *The effect of noise on the frequency stability of a linear oscillator* (*Worcester Polytechnic Institute*).

[17] L. Essen, *A new form of frequency and time standard* (*Proc. Phys. Soc.*, London, 50, 1938, p. 413).

[18] H. B. Law, *An instrument for short-period frequency comparisons of great accuracy* (*J. Inst. Elec. Eng.*, Part III, 94, 1947, p. 38).

[19] C. F. Booth et F. J. M. Laver, *A standard of frequency and its applications* (*J. Inst. Elect. Eng.*, Part III, 93, 1946, p. 223).

[20] A. Blanc-Lapierre et P. Lapostolle, *Fluctuations dans les grandeurs physiques quasi sinusoïdales* (*J. Phys. Rad.*, VII, 1946, p. 153).

SUR CERTAINES PARTICULARITÉS DES PROPAGATIONS TROPOSPHÉRIQUES ET LEURS ANALOGIES EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE

PAR M. ORTUSI,

Direction technique adjointe à la Direction générale C. S. F.-S. F. R.

SOMMAIRE. — *L'objet essentiel de cet article est de mettre en lumière l'analogie que l'on peut trouver en étudiant les propagations troposphériques et les trajectoires des particules en mécanique ondulatoire.*

On sait que les mesures des champs aux grandes distances sont en contradiction formelle avec la théorie actuelle. Aussi a-t-il paru nécessaire à l'auteur de délimiter la validité des simplifications de calcul introduites dans la méthode classique de l'« intégrale de phase ». C'est pourquoi l'article se compose de deux parties correspondant à deux préoccupations différentes. Une première partie expose la théorie classique des propagations troposphériques et étudie la validité de celle-ci sous la forme de sept restrictions soulignées dans le texte.

La deuxième partie expose l'analogie entre l'étude des propagations troposphériques et le problème de la recherche des trajectoires en mécanique ondulatoire. L'auteur montre d'abord comment, dans les meilleures conditions, les trajectoires peuvent être définies à partir des relations d'incertitude sous la forme d'éléments d'ondes guidées. Il examine les deux aspects (électron libre ou lacune) de la particule élémentaire et montre comment l'on peut faire correspondre, à l'aide de la notion de particules complémentaires, leurs ondes associées aux propagations limites des modes de Gamow et d'Eckersley. Cette correspondance est précisée par deux formules remarquablement simples.

Enfin, une application de cette analogie réside dans l'assimilation entre les barrières de potentiel et les barrières d'indice qui sont à l'origine des propagations lointaines. Cette assimilation montre ainsi comment s'opère la création des lacunes à l'intérieur des couches d'arrêt, phénomène qui est la base du fonctionnement des émetteurs des transistors.

(C. D. U. 621.396.11.)

SUMMARY. — *The essential object of this article is to bring out the analogy which can be found by the study of tropospheric propagation and the trajectories of particles in wave-mechanics.*

It is well known that field measurements at long distances are in direct contradiction with present day theory. The author has therefore deemed it necessary to set the limits to the validity of the simplifications in calculation introduced in the classifical method of the « phase-integral ». This is the reason why the article consists of two parts corresponding to two different considerations.

A first part exposes the classical theory of tropospheric propagation and studies its validity in the form of seven restrictions emphasized in the text.

The second part sets out the analogy between the study of tropospheric propagation and the problem of the determination of trajectories in wave-mechanics. The author first shows how, under the best conditions, the trajectories can be defined starting from the relations of uncertainty, in the form of guided waves. He examines the two aspects (free electron or « hole ») of the elementary particle and shows how, by means of the idea of complementary particles, their associated waves can be brought into correspondence with limited cases of propagations in Gamow and in Eckersley modes. This correspondence is evidenced by two remarkably simple formulæ.

Finally, one application of this analogy lies in the assimilation of the potential barriers and the index barriers which are at the roof of distant propagations. This assimilation thus shows how the « holes » inside barrier layers are created, this phenomenon being the basis on which transistor emitters operate. (U. D. C. 621.396.11.)

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSÉ ET CRITIQUE DE LA THÉORIE CLASSIQUE DES PROPAGATIONS TROPOSPHÉRIQUES.

Les expériences effectuées récemment aux États-Unis indiquent que, dans le domaine des ondes centimétriques, la théorie classique de la propagation troposphérique se trouve en défaut aux grandes distances.

Il est naturel d'examiner la nature des hypothèses physiques et la validité des simplifications de calcul introduites pour mener à bien celui-ci.

A. Hypothèses de base de la théorie.

La théorie est fondée sur les hypothèses suivantes :

1° L'air est supposé homogène et, par conséquent, l'indice n est une fonction continue des coordonnées;

2° Les couches atmosphériques sont supposées « stratifiées », c'est-à-dire que l'indice ne dépend que de l'altitude z, $(n = n(z))$.

3° L'air est supposé sans pertes diélectriques et, par suite, l'indice est un nombre réel;

4° La terre est supposée limitée par une sphère parfaite de rayon R. Elle possède une constante diélectrique complexe $\varepsilon = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2$ dont l'ordre de grandeur est donné par le tableau suivant :

Nature du sol.	ε_1.	ε_2.
Mer	70	40
Sol sec	4	0,01
Sol mouillé	30	0,6

1° Mesure des variations de l'indice de réfraction de l'air. — Les hypothèses précédentes montrent que les mesures des variations de l'indice de réfraction de l'air sont à la base de l'étude expérimentale de la propagation.

Ces mesures sont effectuées avec un réfractomètre.

a. Description d'un réfractomètre. — Dans la gamme des longueurs d'ondes centimétriques, un tel appareil est essentiellement composé de deux cavités de forte surtension; l'une d'entre elles est emplie d'air dans les conditions recherchées et l'autre est vidée ou emplie d'un gaz de caractéristiques connues.

La méthode de mesure consiste à déterminer la différence entre les fréquences de résonance des deux cavités, liée à l'indice de l'air n. Dans ce but, les deux cavités sont excitées séparément par un générateur d'ondes centimétriques modulées en fréquence; les impulsions engendrées à la sortie des cavités sont détectées et amplifiées dans un récepteur. Elles sont alors utilisées pour déclencher un double basculateur (flip-flop). Le courant moyen de celui-ci est proportionnel à l'intervalle de temps séparant les impulsions et, par suite, à la différence des fréquences de résonance des deux cavités.

On peut d'ailleurs utiliser une méthode de zéro en annulant le courant moyen du basculateur par la manœuvre d'un dispositif mécanique étalonné modifiant la fréquence de résonance de l'une des cavités.

Cet appareil a permis des mesures de variations relatives de fréquences de résonance de l'ordre de 2.10^{-8} correspondantes à des variations du module de réfraction $[m = 10^6(n - 1)]$ égales à 4.10^{-2}.

b. Résultats des mesures. — Le réfractomètre permet de tracer les profils d'indice [courbes $m = f(z)$] avec une grande précision (*fig.* 1).

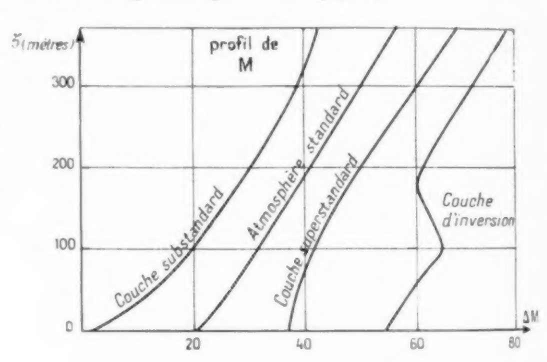


Fig. 1. — Variation de l'indice modifié $N = n + \frac{z}{R}$ ou de $M = (N - 1).10^6$.

Les mesures effectuées ont fourni les résultats suivants :

Le gradient de la fonction m est un vecteur constant aux altitudes élevées de la troposphère. Il est vertical (hypothèse des couches stratifiées) et dirigé vers le sol. Son module est égal à une valeur constante dite « standard » égale à 4.10^{-2}/m [1].

Nous verrons au prochain paragraphe que l'on peut définir un rayon de la terre équivalent R', donné par la relation

$$\frac{10^6}{R'} = \frac{dm}{dz} + \frac{10^6}{R}.$$

[1] La précision du réfractomètre est donc de 1 m en atmosphère standard.

En atmosphère standard,

$$\frac{dm}{dz} = -4\,10^{-2}\ \text{m} \qquad \text{et} \qquad \frac{10^6}{R} = 16\,10^{-2}\ \text{m}.$$

On voit immédiatement que R' est égal aux $\frac{4}{3}$ du rayon de la terre R.

Le gradient de l'indice est quelquefois inférieur en valeur absolue à la valeur standard. C'est le cas des couches « substandards » pour lesquelles $R' < \frac{4}{3}R$. Elles sont défavorables à la propagation.

Le gradient de l'indice est très souvent, au-dessus de la mer, supérieur en valeur absolue à la valeur standard. C'est le cas des couches « superstandards » pour lesquelles $R' > \frac{4}{3}R$. Il peut même arriver que R' devienne infini et prenne une valeur négative dans certaines zones (couche d'inversion). Ces cas sont très favorables à la propagation. Il est facile de se rendre compte de ce fait en remarquant que l'une des théories sommaires de la propagation troposphérique assimile celle-ci à la propagation dans un milieu vide autour d'une sphère de rayon R'. L'horizon fictif est alors déterminé par la valeur de R' et s'éloigne quand R' augmente.

2° CONDITIONS MATHÉMATIQUES DU PROBLÈME. — A partir des hypothèses précédentes et de la connaissance des profils d'indice trouvés expérimentalement, le problème consiste à déterminer le champ électromagnétique rayonné par un dipôle (²) situé à l'altitude z_0, c'est-à-dire à chercher la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\psi + k^2 n^2 \psi = 0 \tag{1}$$

dans laquelle :

$\vec{\psi} = \psi\vec{v}$ désigne la composante verticale du vecteur de Hertz électrique ou magnétique;

k est égal à $\frac{2\pi}{\lambda}$;

$\vec{v}$ est le vecteur unitaire vertical.

Les champs électriques et magnétiques sont donnés par les formules

$$(2)\quad \begin{cases} \vec{E} = \text{grad div}\,\vec{\psi} + k^2\vec{\psi} \\ \vec{H} = ik\,\text{rot}\,\vec{\psi} \end{cases} \text{onde électrique.} \qquad \begin{cases} -\vec{H} = \text{grad div}\,\vec{\psi} + k^2\vec{\psi} \\ \vec{E} = ik\,\text{rot}\,\vec{\psi} \end{cases} \text{onde magnétique.}$$

Si ρ est la distance du point M au centre de la terre, cette solution est valable pour $\rho > R$.

Pour $\rho < R$, la fonction ψ doit être solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta\psi + k^2(\varepsilon_1 - i\varepsilon_2) = 0.$$

Pour $\rho = R$, les deux solutions doivent se raccorder, c'est-à-dire qu'il y a égalité entre les composantes tangentielles des champs et entre les composantes normales des vecteurs inductions.

L'équation (1) est donc soumise à des conditions aux limites déterminées pour $\rho = R$.

De plus, la solution doit se raccorder autour du dipôle avec la solution du rayonnement de celui-ci dans l'espace indéfini.

Enfin, les solutions doivent être régulières et nulles à l'infini.

Deux méthodes sont employées pour déterminer la solution.

B. Méthode de l'optique géométrique.

On pose :

$$\psi(x, y, z) = u(x, y, z)\, e^{i[\omega t - \varphi(x,y,z)]}.$$

Supposons que la fonction φ ne présente ni lignes singulières, ni points singuliers (caustiques et foyers).

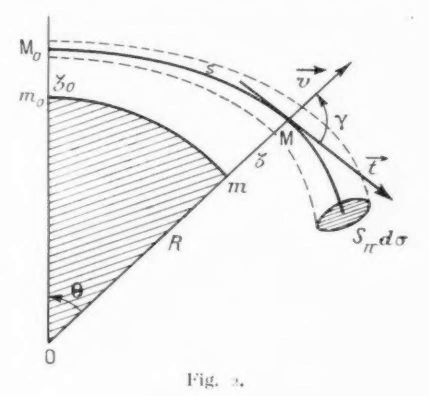


Fig. 2.

Le vecteur de Poynting, $S = \frac{1}{c}\vec{E}.\vec{H}$, est, lorsque n est voisin de 1, parallèle au vecteur $\vec{t} = \text{grad}\ \varphi$. Ce dernier représente la direction du « rayon optique » (*fig.* 2). La méthode de l'optique géométrique consiste à déterminer les trajectoires du vecteur de Poynting $\vec{S}$ ou $\vec{E}$. Le long de ces trajectoires,

(²) La solution d'un problème de rayonnement par une source quelconque peut toujours être ramenée au rayonnement d'une série de dipôles.

le champ électromagnétique décroît linéairement en fonction de la distance, par suite de la conservation du flux de $\vec{S}$ dans un tube de force (*fig.* 2).

Les trajectoires peuvent être déterminées par deux théorèmes équivalents :

1° L'intégrale $\int_{M_1}^{M_2} n\,\mathrm{d}s$, le long d'une trajectoire, est stationnaire par rapport à sa valeur le long d'une courbe voisine.

C'est le principe de Fermat.

2° Si le gradient de n est parallèle au vecteur $\vec{v}$ et si γ désigne l'angle des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{t}$, le produit $\rho n \sin\gamma$ est constant tout le long de la trajectoire (*fig.* 2).

C'est la loi de Snell, généralisation simple de la loi de réfraction de Descartes.

A partir de ces deux théorèmes, on peut déterminer l'équation différentielle des trajectoires et, en particulier, leurs équations intrinsèques $[R' = f(s)]$.

On trouve facilement, en supposant γ voisin de $\frac{\pi}{2}$, que le rayon de courbure R' des trajectoires, défini par la relation

$$R' = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\gamma + \mathrm{d}\theta},$$

est donné par la formule

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{\operatorname{grad} n}{n}. \tag{3}$$

Cette formule suggère deux théories sommaires de la propagation troposphérique :

a. On peut supposer que l'atmosphère est vide et que la propagation s'effectue sur une sphère dont le rayon R' est donné par la formule (3).

C'est cette théorie qui permet de prévoir très simplement le caractère favorable de la propagation en atmosphère superstandard.

En particulier, si $\operatorname{grad} n = -\frac{1}{R}$ (couche d'inversion), la terre fictive se réduit à un plan et la propagation devient une propagation guidée.

b. On peut supposer que la terre est plane (R infini), mais que l'indice n doit être remplacé par l'indice N donné par la relation

$$N = n\left(1 + \frac{z}{R}\right).$$

L'indice N, ainsi défini, s'appelle « l'indice modifié ». Il n'est fonction que de z, $(N = N(z))$.

C. **Méthode de l'optique physique**.

Cette méthode consiste à essayer de résoudre l'équation (1), compte tenu de ses conditions aux limites, à l'aide de certaines simplifications de calcul.

Nous examinerons successivement tous les stades du calcul, afin de voir quelles sont les restrictions apportées, éventuellement, par des simplifications trop inexactes.

1° LE PREMIER STADE du calcul consiste à justifier l'hypothèse d'une terre plane et d'un indice modifié N suggérée par l'optique géométrique.

Pour cela, on effectue, sur les coordonnées ρ, θ, φ sphériques du point M, une transformation

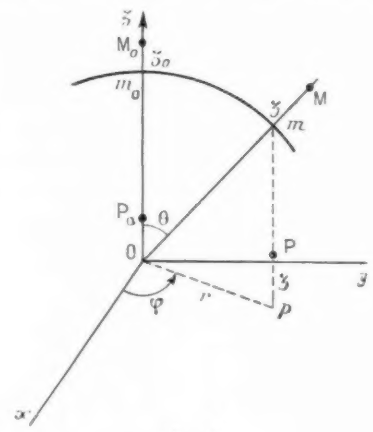


Fig. 3.

aboutissant au point P et définie de la manière suivante (*fig.* 3) :

Soient :

O le centre de la terre;
m l'intersection de OM avec la terre;
p la projection de m sur le plan $Oxyz$ normal à la direction de la verticale du dipôle OM_0;
P le point tel que pP est parallèle à OM_0 et $p\mathrm{P} = m\,\mathrm{M} = z$;
$\vec{E}_{\rho,\theta,\varphi}$, $\vec{H}_{\rho,\theta,\varphi}$ le champ électromagnétique en M;
$E_{x,y,z}$, $H_{x,y,z}$ la valeur de ce champ dans les coordonnées x, y, z.

Un calcul simple montre que, lorsque x, y, z sont petits devant R, les champs transformés E' et H' satisfont aux équations de Maxwell et peuvent, en conséquence, représenter la solution du problème lorsque les conditions suivantes sont remplies :

1[re] *restriction*. — L'indice n doit être remplacé

par l'indice modifié N et l'on admet que le gradient de n reste de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{R}$.

2e *restriction*. — On admet, au préalable, que les dérivés des champs $\vec{E}'$ et $\vec{H}'$ par rapport à z sont petites devant les dérivés par rapport à x et à y.

3e *restriction*. — On admet que les conditions aux limites appliquées sur la terre pour $\rho = R$ et autour du dipôle en M_0, en coordonnées sphériques, sont encore applicables pour la surface transformée de la terre (plan xOy) et pour le point transformé du point M_0 (point P_0), en coordonnées rectangulaires.

Nous verrons que cette restriction est une des plus délicates.

Lorsqu'elle est admise, le calcul des champs $\vec{E}'$ et $\vec{H}'$ en un point P fournit la valeur des champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ au point M transformé du point P.

2° Deuxième stade. — La recherche du champ en P étant un problème de révolution, on utilise les coordonnées cylindriques (r, φ, z) du point P (*fig.* 3).

La séparation des variables de l'équation (1) peut alors être effectuée par rapport à r et z et conduit aux deux équations différentielles que doit vérifier chaque onde élémentaire

$$\psi_\mu = f(r)\,v(z),$$

$$f'' - \frac{f'}{r} + \mu^2 f = 0, \tag{4}$$

$$v'' + (k^2 N^2 - \mu^2)\,v = 0. \tag{5}$$

La solution de l'équation (4), nulle pour $r = 0$ et se raccordant au rayonnement du dipôle P_0, est la fonction de Bessel $\mu\,\mathcal{J}_0(\mu r)\,d\mu$. On en déduit l'expression de la solution de l'équation (1) donnée par une intégrale de Sommerfeld

$$\psi = \int_0^\infty \psi_\mu = \int_0^\infty \mu\,\mathcal{J}_0(\mu r)\,v(z, \mu)\,d\mu. \tag{6}$$

4e *restriction*. — On admettra l'hypothèse d'une atmosphère standard aux altitudes élevées, c'est-à-dire que grad N tend vers une valeur limite lorsque z tend vers l'infini.

Cette restriction faite, les conditions aux limites sur la surface de la terre [les champs étant toujours calculés par les formules (2)], et la régularité de la fonction $v(z, \mu)$ lorsque $z \to \infty$ fournissent la valeur de cette fonction pour chaque onde élémentaire ψ_μ.

La fonction v est déterminée par la connaissance de deux solutions particulières de l'équation (5), v_1 et v_2, représentant des ondes convergentes et divergentes par rapport à la verticale et dont les valeurs asymptotiques, pour z z_0, sont données par les relations

$$v_1(z, \mu) \sim (k^2 N^2 - \mu^2)^{-\frac{1}{4}}\, e^{i\int_{z_1}^{z} (k^2 N^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} dz},$$

$$v_2(z, \mu) \sim (k^2 N^2 - \mu^2)^{-\frac{1}{4}}\, e^{-i\int_{z_1}^{z} (k^2 N^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}} dz},$$

z_1 désignant le dernier zéro de la fonction de z que représente l'expression $k^2 N^2 - \mu^2$.

La solution générale, fonction de z et de μ, est donnée par les deux formules :

Pour $z > z_0$:

$$v(z, \mu) = \frac{2}{W}\left[\frac{v'_1(0) - p\,v_1(0)}{v'_2(0) - p\,v_2(0)} - \frac{v_1(z_0)}{v_2(z_0)}\right] v_2(z_0)\,v_2(z);$$

Pour $z < z_0$:

$$v(z, \mu) = \frac{2}{W}\left[\frac{v'_1(0) - p\,v_1(0)}{v'_2(0) - p\,v_2(0)} - \frac{v_1(z)}{v_2(z)}\right] v_2(z_0)\,v_2(z),$$

dans lesquelles :

W désigne le wronskien de v_1 et v_2

$$W = v_1(0)\,v'_2(0) - v'_1(0)\,v_2(0);$$

$p(\mu)$ est donné, en fonction de la constante diélectrique complexe ε de la terre, par les relations :

$$p = \frac{i}{\varepsilon}\sqrt{k^2\varepsilon - \mu^2} \tag{a}$$

pour les ondes électriques (vecteur électrique vertical);

$$p = i\sqrt{k^2\varepsilon - \mu^2} \tag{b}$$

pour les ondes magnétiques (vecteur électrique horizontal).

3° Troisième stade. — On suppose maintenant le champ défini loin de la source d'excitation et l'on remplace la fonction de Bessel $\mathcal{J}_0(\mu r)$ par la valeur égale

$$\mathcal{J}_0(\mu r) = \frac{1}{2}\mathcal{H}_0^{(1)}(\mu r) + \frac{1}{2}\mathcal{H}_0^{(2)}(\mu r).$$

Les fonctions de Hanckel $\mathcal{H}_0^{(1)}(\mu r)$ et $\mathcal{H}_0^{(2)}(\mu r)$ représentent respectivement les ondes convergentes et divergentes.

On remplace alors l'intégration le long de l'axe réel des μ, de l'équation (6), par une intégrale dans le plan complexe de μ autour du premier quadrant.

Cette possibilité est soumise à deux restrictions :

5e *restriction.* — La fonction $v(z, \mu)$ n'a aucune singularité dans le premier quadrant. Elle ne possède pas de pôles, ce qui conduirait à des ondes convergentes dans l'expression (6).

Elle ne possède pas non plus de points multiples. En effet, les fonctions v_1 et v_2 sont des fonctions régulières de μ (à cause du choix de z_1) et les seuls points multiples sont donc ceux de la fonction $p(\mu)$ obtenus pour $p = 0$ ou $\mu_i = \pm k^2\varepsilon$. Or ε_1 et ε_2 étant positifs, il en résulte que μ_i ne se trouve que dans le second ou le quatrième quadrant.

6e *restriction.* — On admet que l'intégration le long du cercle de l'infini de la fonction $\mu \mathcal{H}_0^{(1)}(\mu r)\, v(z, \mu)$ est nulle. Cette hypothèse, vraie pour l'atmosphère standard, doit être vérifiée dans chaque cas particulier.

Avec ces restrictions, l'intégration autour du premier quadrant fournit alors la solution de l'équation (1) en fonction seulement des ondes divergentes $\mathcal{H}_0^{(2)}(\mu r)$,

$$(7) \quad \psi = -\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_0^{(2)}(\mu_n r)\, v_2^{(1)}(z, \mu_n)\, v_2^{(1)}(z_0, \mu_n) + \frac{1}{2} \int_B \mu\, \mathcal{H}_0^{(2)}(\mu r)\, v(z, \mu)\, d\mu.$$

Dans cette expression :

L'intégrale est effectuée autour du point multiple de la fonction v situé dans le 4e quadrant. Cette intégrale est nulle lorsque la terre est supposée conductrice et reste, en général, très petite devant la série.

Les valeurs $\mu = \mu_n$ sont les valeurs propres, données par chaque racine de l'équation

$$(8) \quad v_2'(0, \mu) - p(\mu)\, v_2(0, \mu) = 0.$$

Ce sont les pôles de la fonction v (par hypothèse, ils sont en dehors du premier quadrant).

La fonction $v_2^{(1)}(z, \mu_n)$ est obtenue par « normalisation », au sens habituel de la mécanique quantique, de la fonction propre $v_2(z, \mu_n)$, c'est-à-dire que l'on a

$$v_2^{(1)}(z, \mu_n) = \frac{v_2(z, \mu_n)}{\sqrt{\int_0^{\infty} v_2^2(z, \mu_n)\, dz + \frac{v_2^2(0, \mu_n)}{2\mu_n} \left(\frac{dp}{d\mu}\right)_{\mu=\mu_n}}}.$$

La résolution de l'intégrale (6) sous la forme d'une série d'ondes élémentaires divergentes est connue sous le nom de « théorème fondamental ». Les ondes élémentaires pour lesquelles les valeurs propres μ_n ont leurs composantes imaginaires les plus faibles, sont prédominantes dans la série et sont seules à considérer aux grandes distances.

Deux cas peuvent se présenter :

a. Les valeurs propres μ_n ont une composante imaginaire petite devant la composante réelle. Le mode correspondant s'appelle *mode de Gamow.*

A la limite, lorsque la valeur propre μ_n est égale à une valeur réelle *a*, l'onde tend vers une valeur asymptotique de la forme $\dfrac{\sin(\omega t - ar)}{\sqrt{r}}$.

L'onde sera dite *réelle.*

b. Les valeurs propres μ_n ont une composante imaginaire de l'ordre de la composante réelle. Le mode correspondant s'appelle *mode de Eckersley.* Il correspond à des champs fortement atténués.

A la limite, lorsque la valeur propre μ_n est égale à une valeur imaginaire pure *ib*, l'onde tend vers une valeur asymptotique de la forme $\dfrac{e^{-br}}{\sqrt{r}} \sin \omega t$.

L'onde sera dite *évanescente pure.*

4° QUATRIÈME STADE. — *Méthode de « l'intégrale de phase »* [3]. — Le théorème fondamental fournit donc la solution du problème lorsque l'on connaît les valeurs propres μ_n et les fonctions propres normalisées $v_2^{(1)}(z, \mu_n)$ de l'équation différentielle (5)

$$(5) \quad v'' + (k^2 N^2 - \mu^2) v = 0.$$

On sait que l'équation (5) est une équation fondamentale en mécanique quantique.

Posons, en effet,

$$P(z) = k^2 N^2 - \mu^2.$$

Nous verrons que l'équation différentielle de l'onde associée à un électron, lorsque le potentiel des forces intérieures ne dépend que de z, est une équation de la forme (5)

$$(5\ bis) \quad v'' + P(z) v = 0.$$

On examinera, dans la deuxième partie, l'analogie profonde qui existe entre les propagations troposphériques et les trajectoires des particules, en particulier à l'intérieur des couches d'arrêt.

On verra comment les modes de Gamow et d'Eckersley sont associés à la stabilité des électrons et des lacunes.

Quoi qu'il en soit, l'analogie quantique suggère une méthode générale de résolution de l'équation (5) à partir du changement de variable.

$$v = e^{iu}.$$

[3] La méthode de l'intégrale de phase a été étudiée en France par Jean Voge.

Nous avons vu plus haut que u possède deux déterminations asymptotiques

$$u_1 = - u_2 = \int_{z_1}^{z} [P(z)]^{\frac{1}{2}} dz.$$

On définit alors deux valeurs A et B par la relation

$$(9) \qquad v_2 = P^{-\frac{1}{4}}(z) [A e^{iu_1} + B e^{iu_2}].$$

C'est la formule dite « W-K-B » (Wentzel-Krammer-Brillouin).

Les valeurs de A et de B doivent être des constantes lorsque $z \to \infty$. On peut alors montrer que les valeurs A et B sont des constantes dans tout le plan complexe de z, sauf au voisinage du point singulier $z = z_1$ et des lignes singulières de $u_1(z)$. En intégrant u_1 autour du point z_1, on voit facilement que u_1 est de la forme

$$u_1 \sim (z - z_1)^{\frac{3}{2}}.$$

u_1 a donc un point triple en z_1.

Il existe ainsi trois lignes du plan complexe de z, concourrantes vers l'image de z_1, et telles que u_1 soit réel le long de ces lignes. Ces lignes sont appelées « lignes anti-Stokes ».

Il existe également trois autres lignes telles que u_1 soit imaginaire pur le long d'elles. Ce sont les « lignes de Stokes ».

Les lignes de Stokes divisent le plan complexe en trois régions pour lesquelles les constantes A et B prennent les trois groupes de valeurs

$$A_{\text{I}}, \quad A_{\text{II}}, \quad A_{\text{III}} \quad \text{et} \quad B_{\text{I}}, \quad B_{\text{II}}, \quad B_{\text{III}}.$$

On passe des constantes de la région I à celles des régions II ou III au moyen des relations

$$A_{\text{II}} = A_{\text{I}} + i B_{\text{I}}, \qquad B_{\text{II}} = B_{\text{I}},$$
$$A_{\text{III}} = A_{\text{II}}; \qquad B_{\text{III}} = B_{\text{II}} + i B_{\text{I}}.$$

Ces constantes étant déterminées, les valeurs de A et de B, dans la région correspondante au point $z = 0$, fixent la valeur de la fonction $v_1(0, \mu)$ et, par suite, les valeurs propres μ_n, solutions de l'équation (8). Ceci suppose implicitement la restriction suivante :

7e restriction. — La valeur $z = z_1$ est suffisamment éloignée de la valeur $z = 0$ pour que les valeurs de A et B puissent être prises égales aux constantes de la région correspondante. Nous verrons plus loin que cette restriction est très importante quand la longueur d'onde tend vers zéro.

Cette restriction étant admise, deux cas peuvent se présenter :

a. La valeur $z = z_1$ est le seul zéro de l'équation $P(z) = 0$. Il est évident que c'est le cas de l'atmosphère standard. On peut montrer alors que μ_n a toujours une composante imaginaire et les seuls modes possibles, à grande distance, sont les modes d'Eckersley.

b. L'équation $P(z) = 0$ possède deux solutions $z_1^{(1)}$ et $z_1^{(2)}$. Il est évident que c'est le cas de l'atmosphère superstandard, avec couche d'inversion, pour certaines valeurs faibles de μ. On démontre alors que la région $z_1^{(1)} < z < z_1^{(2)}$ constitue une « barrière » très analogue aux barrières de potentiel rencontrées en mécanique quantique. La présence de cette barrière fournit des valeurs propres μ_n rendues réelles par le changement des régions de Stokes et, par suite, la barrière fonctionne comme un véritable guide facilitant la propagation.

D. **Critiques apportées à la théorie.**

Les critiques apportées à la théorie, pour justifier les résultats expérimentaux, peuvent être de deux natures différentes :

1° Critique des hypothèses faites pour établir le calcul;

2° Critique des simplifications apportées au calcul.

a. Critique des hypothèses. — Nous avons énoncé, au début de cet article, les quatre hypothèses avancées. De nombreux auteurs ont essayé de critiquer ces hypothèses et de les remplacer par d'autres hypothèses permettant d'obtenir des modes autres que ceux de Gamow ou d'Eckersley.

Nous ne retiendrons que la critique de la 2e et de la 4e hypothèse.

On a critiqué l'hypothèse des couches stratifiées et admis qu'il existait des régions où le gradient de l'indice possède une composante horizontale non nulle.

C'est la théorie de la turbulence de l'air développée par Booker et Gordon.

Dans cette théorie, les régions de l'air à forte turbulence peuvent jouer le rôle de la « barrière » de l'atmosphère superstandard.

Cette théorie ne paraît pas justifiée par les mesures très précises des plans verticaux de propagations.

b. On a critiqué aussi l'hypothèse de la sphéricité parfaite de la terre. De nombreux calculs ont été entrepris depuis Lord Rayleigh sur ce sujet. Il importe de remarquer que tous ces calculs sont basés sur les lois simples de la diffraction due aux zones de Fresnel.

A notre connaissance, la méthode de l'intégrale de phase n'a pas été appliquée à ce problème même

dans le cas le plus simple d'une déformation sinusoïdale du sol.

2° Critique des simplifications apportées au calcul. — Nous avons indiqué, tout au long de l'exposé précédent, les sept restrictions apportées au calcul de façon à pouvoir obtenir l'expression des champs en fonction de la distance.

Nous avons examiné en détail la justification de chacune de ces restrictions. Les approximations qui nous semblent les plus délicates sont celles qui négligent la 3e et la 7e restriction.

a. Étude de la 3e restriction (relative à la transformation des conditions aux limites). — On sait que les conditions aux limites sont équivalentes à la donnée d'une multiplicité $\mathfrak{M}$ de l'équation aux dérivées partielles (1).

La transformation opérée sur les conditions aux limites équivaut donc à une transformation sur la multiplicité $\mathfrak{M}$.

Dans les coordonnées sphériques, la multiplicité $\mathfrak{M}$ possède une ligne singulière. En effet, on peut montrer que les cônes issus d'un point fixe font partie d'une multiplicité caractéristique de l'équation (1). En particulier, le cône issu du point M_0 et tangent à la terre, fait partie d'une multiplicité caractéristique $\mathfrak{M}_c$. Il en résulte que l'intersection de ce cône avec la terre (horizon optique) est un élément commun à la fois à la multiplicité $\mathfrak{M}$ et à la multiplicité caractéristique $\mathfrak{M}_c$ (mêmes points et mêmes éléments de contact).

Elle constitue donc une ligne singulière de la multiplicité donnée $\mathfrak{M}$.

Dans les coordonnées rectangulaires, la ligne singulière est rejetée à l'infini et, par suite, la multiplicité transformée $\mathfrak{M}'$ diffère notablement de la multiplicité $\mathfrak{M}$.

Il en résulte que la solution de l'équation (1) dans les coordonnées transformées peut différer notablement de la solution vraie.

En effet, à l'inverse des solutions des équations différentielles, la forme générale de la solution d'une équation aux dérivées partielles dépend étroitement de la donnée de la multiplicité $\mathfrak{M}$ (problème de Cauchy).

Le problème de Cauchy est lié à la connaissance d'une multiplicité caractéristique et à la donnée de la multiplicité $\mathfrak{M}$.

Une modification sur celle-ci, en particulier la suppression d'une ligne singulière, peut conduire à de grandes différences sur la forme de la solution, telles que l'apparition d'intégrales singulières que l'on ne rencontre pas dans les coordonnées rectangulaires.

Un exemple analogue est fourni par l'étude de la stabilité de l'onde H_0 dans les guides circulaires.

On étudie parfois l'onde H_0, dans un guide elliptique à faible excentricité, au moyen d'un développement en série de Fourier d'ondes du type circulaire. On constate, dans ces conditions, que les termes de la série sont tous nuls. On est tenté d'en déduire l'instabilité de l'onde H_0 vis-à-vis d'une petite déformation de la paroi.

En réalité, cette conclusion est erronée. La nouvelle solution, dans le guide elliptique, dépend étroitement de la donnée de la nouvelle multiplicité et ne peut être développée en série de Fourier, laquelle, en particulier, ne présente pas de points singuliers.

En réalité, des points singuliers apparaissent, dès que l'excentricité cesse d'être nulle, aux extrémités du grand axe de l'ellipse. La série de Fourier doit être remplacée par deux séries de Laurent autour des points singuliers; on peut ainsi obtenir une déformation de l'onde H_0 parfaitement continue et conclure en réalité, à la stabilité de l'onde H_0 vis-à-vis d'une déformation de la paroi.

Il paraît ainsi naturel de reprendre le calcul de l'équation aux dérivées partielles (1) en coordonnées sphériques.

Les fonctions élémentaires $\mu \mathcal{J}_0(\mu r)$ doivent alors être remplacées par les fonctions de Laplace correspondantes. Le calcul est très analogue au calcul du rotateur de Schroedinger dans le cas de l'atome d'hydrogène.

b. Étude de la 7e restriction (validité de la constance de A et B au point $z = 0$). — Nous avons vu que les valeurs de z correspondantes à l'origine des lignes de Stokes étaient données par la solution z_1 de l'équation

$$k^2 \Lambda^2 - \mu^2 = 0.$$

Lorsque la longueur d'onde est très courte, k devient grand et, par suite, la valeur de z_1 peut devenir très petite. Il en résulte que le point $z = 0$ est alors situé très près du point $z = z_1$.

Dans ces conditions, il n'est pas sûr que les valeurs de A et de B aient pris les valeurs constantes A_{II} et B_{II} obtenues lorsque aucune ligne de Stokes ne passe entre les points $z = 0$ et $z = z_1$ (ce qui est le cas en atmosphère standard).

On a vu, en effet, que les valeurs constantes devaient être obtenues pour des points suffisamment éloignés du point singulier et des lignes de Stokes.

De cette remarque, on peut, en outre, déduire, dans le cas des longueurs d'onde courtes, qu'une petite variation sur la valeur fixe $z = 0$, où s'appliquent

les conditions aux limites, peut suffire à expliquer une variation notable des constantes A_{11} et B_{11} et, par suite, de grandes variations sur les valeurs propres μ_n déterminant l'affaiblissement de l'onde.

On voit ainsi toute l'importance d'une étude, par la méthode de l'intégrale de phase, de la propagation sur une terre supposée irrégulière ; par exemple, avec une ondulation sinusoïdale du sol.

Une telle étude pourrait apporter une réponse dans deux problèmes de propagation :

Elle permettrait de tenir compte de modification des conditions aux limites et pourrait justifier la 3e restriction;

Elle permettrait d'expliquer l'influence profonde exercée sur la propagation des ondes de très courtes longueurs d'onde par les faibles irrégularités rencontrées à la surface de la terre.

DEUXIÈME PARTIE.

ANALOGIES ENTRE LA PROPAGATION TROPOSPHÉRIQUE ET L'ONDE ASSOCIÉE A UNE PARTICULE (4).

Nous allons montrer, dans cette deuxième partie, la profonde analogie qui existe entre la propagation troposphérique et la propagation de l'onde associée à une particule lorsque l'énergie potentielle ne dépend que de la coordonnée z, $[\mathrm{H} = \mathrm{H}(z)]$.

Une particule élémentaire libre est définie par :

La position O;

La vitesse $\vec{v}$;

La masse m_0 commune des électrons et des lacunes;

L'énergie interne $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_c$ dans laquelle : $\mathcal{E}_0$ est une constante universelle égale à 5.10^5 eV; $\mathcal{E}_c$ est l'énergie cinétique, positive lorsque la particule est un électron, négative lorsque la particule est une lacune.

$\mathcal{E}_c$ est lié à v par la relation commune aux deux particules élémentaires $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m_0 v^2$.

Cette relation, dans le cas des corps solides, reste encore valable pour le centre de la zone de Brillouin, correspondant à des niveaux d'énergie voisins du niveau de Fermi.

A. **Onde associée à une particule**.

a. Équation de Schroëdinger. — La trajectoire de la particule étant supposée d'axe Oz, l'onde associée sera, en coordonnées cylindriques z et r, représentée par l'expression

$$\varphi_1(r, z)\, e^{i\omega t} = \varphi(r, z)\, e^{i(\omega t - k_z z)}$$

dans laquelle

$\omega = 2\pi\nu = kc = \frac{2\pi c}{\lambda}$ est la pulsation;

$k_z = \frac{2\pi}{\lambda_z}$ est la constante de propagation.

La fonction φ_1 doit, lorsque k_z est très petit devant k (5), satisfaire à l'équation de Schroëdinger

$$\Delta\varphi_1 + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(\mathcal{E}_n - \mathrm{H}_{(z)})\varphi_1 = 0. \tag{1}$$

A toute onde φ_1 doit correspondre une particule sous la double réserve suivante :

1° La valeur propre $\mathcal{E}_n$ doit être un nombre réel, positif, égal à l'énergie interne de la particule.

2° L'onde associée doit satisfaire, pour correspondre à la solution d'un problème donné, aux relations d'incertitude relatives à ce problème.

b. Application des relations d'incertitude a la recherche de la trajectoire d'une particule. — Le problème de la recherche de la trajectoire d'une particule dont la masse et l'énergie interne sont données initialement est celui de la recherche d'un vecteur $\vec{v}_z$ avec le double objectif suivant :

Le vecteur $\vec{v}_z$ (vecteur vitesse de la particule) doit être situé le plus près possible de l'axe Oz (Δr minimum);

Le vecteur $\vec{v}_z$ doit avoir son amplitude définie dans les meilleures conditions (Δv_z minimum) afin de déterminer au mieux les modifications de l'énergie de la particule sur sa trajectoire.

Les relations d'incertitude seront donc de deux sortes :

1° La relation d'incertitude vis-à-vis de la coordonnée z s'écrit

$$m_0\, \Delta z\, \Delta v_z \geq h.$$

Or, aucune condition n'étant imposée à la valeur de Δz, le minimum de Δv_z sera donc obtenu lorsque Δ_z correspond à la totalité de l'extension de la configuration en volume.

(4) Cette analogie est purement mathématique et est indépendante de la plupart des restrictions de la première partie. En particulier, la terre sera supposée plane.

(5) C'est-à-dire lorsque $v \ll c$. Rappelons, en outre, que l'équation de Schroëdinger régit la statique de la mécanique ondulatoire, et l'équation d'évolution la dynamique des petits mouvements.

Si l'on admet que celle-ci est un cube de dimensions unitaires, on a donc

$$\Delta z = 1$$

et, par suite,

$$\Delta v_{z(\min)} = \frac{h}{m_0}.$$

Cette relation est équivalente au principe suivant :

Par rapport à l'axe Oz, l'incertitude la plus faible est relative à la vitesse de la particule. Dans la représentation géométrique de l'extension en phase des vitesses, elle correspond à une incertitude sur l'impulsion égale au minimum à la dimension d'une cellule (6).

2° Les relations d'incertitude vis-à-vis des coordonnées x et y sont identiques et s'écrivent

$$m_0 \, \Delta r \, \Delta v_r \geq h.$$

Aucune condition n'étant demandée à Δv_r, le minimum de Δr est obtenu lorsque Δv_r est égal au maximum de vitesse possible c (7).

On a, par conséquent,

$$\Delta r_{(\min)} = \frac{h}{m_0 c}.$$

Nous verrons que le second membre de cette égalité est égal à la longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$ associée à la particule au repos de masse m_0.

La 2e et 3e relation d'incertitude sont donc équivalentes au principe suivant :

La trajectoire d'une particule est, dans les meilleures conditions, indéterminée à l'intérieur d'un cylindre d'axe Oz et de rayon λ_0.

c. Vitesse de groupe de l'onde associée. — Nous supposerons que l'onde associée possède une bande de fréquence $\Delta\nu$, l'amplitude d'une bande élémentaire $d\nu$ demeurant constante (pas d'absorption sélective) et égale à $\varphi\,(r, z)\,\frac{d\nu}{\Delta\nu}$ pour tout le paquet d'ondes.

L'amplitude complexe résultante est alors

$$\Phi\, e^{i\omega t} = \int_{\nu}^{\nu+\Delta\nu} \frac{\varphi(r, z)}{\Delta\nu}\, e^{i(\omega t - k_z z)}\, d\nu.$$

On peut écrire

$$\Phi\, e^{i\omega t} = \frac{\varphi(r, z)}{\Delta\nu}\, e^{i(\omega t - k_z z)} \int_0^{\Delta\nu} e^{i(d\omega t - dk_z z)}\, d\nu.$$

Posons

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_z} \tag{2}$$

et prenons comme nouvelle variable $\nu + \varepsilon$, avec $0 < \varepsilon < \Delta\nu$.

On a

$$\Phi = \frac{\varphi(r, z)}{\Delta\nu}\, e^{-ik_z z} \int_0^{\Delta\nu} e^{2i\pi\left(t - \frac{z}{v_g}\right)\varepsilon}\, d\varepsilon.$$

On intègre facilement pour obtenir

$$\Phi = \varphi(r, z)\, e^{-ik_z z}\, \frac{\sin 2\pi\Delta\nu\left(t - \frac{z}{v_g}\right)}{2\pi\Delta\nu\left(t - \frac{z}{v_g}\right)}.$$

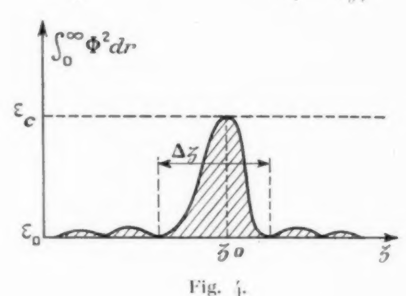


Fig. 4.

La courbe donnant le carré de Φ en fonction de z est représentée sur la figure 4.

Elle est de la forme

$$\Phi^2 = \varphi^2(r, z)\, |e^{-2ik_z z}|\, \frac{\sin^2 \frac{2\pi\Delta\nu}{v_g}(z - z_0)}{\left[\frac{2\pi\Delta\nu}{v_g}(z - z_0)\right]^2},$$

avec

$$z_0 = v_g t.$$

La courbe de la figure 4 se déplace donc en bloc le long de Oz avec la vitesse v_g dite vitesse de groupe.

Les variations de la fonction $\varphi\,(r, z)$ en fonction de z déterminent les « transitions » de la particule, en particulier ses modifications d'énergie cinétique et son libre parcours moyen.

Lorsque k_z est imaginaire pur, la vitesse de déplacement est iv_g et l'expression $e^{-2ik_z z}$ représente l'atténuation de l'onde associée.

Cette atténuation est faible lorsque v_g est beaucoup plus petit que c.

d. Relations de liaisons entre l'onde associée et la particule a partir de la 1re relation

(6) Rappelons qu'une cellule est obtenue en cloisonnant, en éléments partiels d'étendue h^3, l'espace représentatif des vecteurs impulsions $(\vec{p}_i = m\vec{v}_i)$ de la totalité de la phase de volume supposée unitaire. D'après le principe de Pauli, deux particules liées, de spin différent, peuvent au maximum occuper chaque cellule. Ces particules sont des électrons ou des lacunes.

(7) On remarquera que c'est le seul point où s'introduit la loi de relativité.

D'INCERTITUDE. — L'incertitude sur la localisation de la particule est égale à la distance Δz séparant les deux premiers zéros de Φ^2 (*fig.* 4).

On a facilement

$$\Delta z = \frac{v_g}{\Delta \nu}.$$

L'équation d'incertitude devient

$$m \frac{v_g}{\Delta \nu} \Delta v = h. \tag{3}$$

Si l'on admet que la vitesse de déplacement v_g de la courbe Φ^2 représente la vitesse de la particule, on a

$$v_g = v.$$

L'équation (3) s'intègre et donne

$$\frac{1}{2} m v_g^2 = h(\nu - \nu_0). \tag{4}$$

L'équation (4) fournit les relations de liaisons.

1° *Relation d'Einstein.* — En posant

$$h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{hc}{2\pi} k_0 = \mathcal{E}_0,$$

l'équation (4) s'écrit

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_0 + \frac{1}{2} m v_g^2 = h\nu.$$

C'est la relation d'Einstein.

2° *Relation de De Broglie.* — En tenant compte des équations (2) et (4), on a

$$dk_z = \frac{d\omega}{v_g} = \frac{2\pi\, d\nu}{\sqrt{\frac{2h}{m}(\nu - \nu_0)}}.$$

En intégrant entre ν_0 et ν, on a

$$k_z = \int_{\nu_0}^{\nu} dk_z = 4\pi \sqrt{\frac{m}{2h}(\nu - \nu_0)}.$$

En tenant compte de la relation (4) on obtient facilement

$$k_z = \frac{2\pi m v_g}{h} \quad \text{ou} \quad \lambda_z = \frac{h}{m v_g}.$$

C'est la relation de De Broglie

3° On obtient alors en tenant compte de la relation de De Broglie et du principe d'identité entre la masse et l'énergie ($\mathcal{E} = mc^2$) les groupes de relation

$$\frac{k_z}{k} = \frac{v_g}{c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}}} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{h}{mc}. \tag{5}$$

e. PARTICULES COMPLÉMENTAIRES. — Par suite de la première réserve faite ($\mathcal{E}$ positif et réel), deux cas seulement sont possibles.

1° $\mathcal{E}_c$ est positif, k_z réel, $v_g = v$ réel.

La particule est un *électron*.

L'onde associée est une *onde réelle*.

2° $\mathcal{E}_c$ est négatif, k_z imaginaire pur, $v_g = iv$ imaginaire pur.

La particule est une *lacune*.

L'onde associée est une onde *évanescente pure*.

Par définition, un électron d'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ et une lacune d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c_1}$ seront dits *complémentaires*, si l'on a

$$\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{c_1} = 0.$$

B. Assimilation entre un problème de propagation troposphérique et celui de la trajectoire d'une particule.

Reprenons l'équation (1) et effectuons la séparation des variables en posant

$$\varphi_1(r, z) = f(r)\psi(z)e^{-ik_z z}.$$

L'équation de Schroëdinger est réductible aux deux équations différentielles :

$$f'' + \frac{f'}{r} + \sigma^2 f = 0, \tag{6}$$

$$\psi'' + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(\mathcal{E} - \mathrm{H}_{(z)}\psi) - (\sigma^2 + k_z^2)\psi = 0. \tag{7}$$

σ désignant une constante.

a. INTÉGRATION DE (6). — Cette équation s'intègre et a pour solution $f = \mathfrak{J}_0(\sigma r)$.

En réalité, lorsque l'on considère l'onde associée à une particule en présence de N_p particules, on peut montrer par des considérations thermodynamiques, que la fonction $\mathfrak{J}_0(\sigma r)$ doit être remplacée par la fonction

$$f' = \frac{\mathfrak{J}_0[\sigma(r - r_n)]}{\mathfrak{J}_0(\sigma r_n)} e^{-\frac{\sigma^2 r^2}{2}},$$

dans laquelle σr_n désigne la $N_p^{\text{ième}}$ racine de la fonction $\mathfrak{J}_1$.

Si l'on veut que cette fonction représente une solution liée à la recherche d'une trajectoire, il faut, de plus, que $\Delta_{r\,\min}$ soit égal à la distance obtenue par les deux premiers zéros de la fonction f'.

Si N_p est assez grand, il est facile de voir que l'on a

$$\sigma \Delta_{r\,\min} = 2\pi$$

(la valeur 2π remplace la valeur 4,8 qui correspondrait à une seule particule.)

En tenant compte de la valeur de Δ_r fournie par les 2e et 3e relations d'incertitude, on a

$$\sigma = k_0.$$

b. Identité entre l'équation (7) et l'équation de la propagation troposphérique. — En tenant compte des relations (4) et (5), l'équation (7) devient, pour cette valeur de σ,

$$\psi'' + \frac{2kk_0}{\mathcal{E}_0}[\mathcal{E} - \mathrm{H}(z)]\psi - k^2\psi = 0. \tag{8}$$

Par un développement limité en supposant $k_z \simeq k_0$, on obtient

$$\psi'' + \left[k_0^2 + k_z^2 - 2\frac{k_0^2\,\mathrm{H}(z)}{\mathcal{E}_0}\right]\psi = 0. \tag{9}$$

Comparons cette équation (9) avec l'équation de la propagation troposphérique (5) de la page 86 dans laquelle, évidemment, k doit être remplacé par k_0

$$v'' + [k_0^2 N^2(z) - \mu_n^2]v = 0, \tag{10}$$

on voit que les équations (9) et (10) peuvent être identiques, lorsque $N(z)$ est voisin de 1, à condition de poser

$$\boxed{\begin{gathered} N(z) - 1 = M(z).10^{-6} = -\frac{\mathrm{H}(z)}{\mathcal{E}_0}, \\ \mu_n^2 = -k_z^2. \end{gathered}}$$

Ces relations sont, comme on le voit, remarquablement simples.

On voit ainsi, qu'en dehors des conditions aux limites, un problème de propagation peut être assimilé à celui de la trajectoire d'une particule avec une énergie potentielle $\mathrm{H}(z)$ donnée, lorsque les conditions suivantes sont remplies :

1° L'énergie potentielle $\mathrm{H}(z)$ est assimilée au module de réfraction $M(z)$ [8] :

2° La vitesse de groupe de la propagation le long de la terre est assimilée à la vitesse de groupe de la particule complémentaire le long de sa trajectoire.

Les solutions ne peuvent toutefois être identiques que si les conditions aux limites sont les mêmes ou si elles n'ont pas d'influence profonde sur la forme des solutions.

Dans le cas des particules libres, les conditions aux limites sont toujours vérifiées, et il n'y a pas de valeurs propres pour $\mathcal{E}_r$ comme pour μ_n;

Dans le cas des particules liées, les conditions aux limites obligent $\mathcal{E}_r$, comme pour μ_n, à prendre un groupe de valeurs propres $\mathcal{E}_{r_n}$.

C. Application des analogies entre les deux études.

L'application de cette analogie consiste dans certaines prévisions relatives aux trajectoires et, en conséquence, aux phénomènes de transition et au libre parcours moyen des particules liées à la fonction $\psi(z)$. D'une manière générale, et sous réserve des conditions aux limites :

Les modes de *Gamow*, correspondants à des ondes réelles, seront assimilés aux ondes associées aux particules complémentaires, c'est-à-dire aux *lacunes*;

Les modes d'*Eckersley*, correspondant à des ondes évanescentes, seront assimilés aux ondes associées aux particules complémentaires, c'est-à-dire aux *électrons*;

L'importance de la valeur du gradient de l'indice souligne le rôle important joué par le gradient de l'énergie potentielle, proportionnel au champ électrique

$$-\vec{E} = \frac{1}{e}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{H}(z) = \mathrm{grad}\,V(z).$$

e désignant la charge, égale en valeur absolue, de l'électron et de la lacune :
e est négatif pour l'électron;
e est positif pour la lacune.

Nous considérerons exclusivement deux cas particuliers d'assimilation :

1° Assimilation de l'atmosphère standard. — Elle est assimilable à un potentiel variable linéairement, d'où un champ constant relativement faible. C'est, comme l'on sait, un cas très général, où le potentiel suit la loi d'Ohm bien connue.

Il a été souligné que les seuls modes de propagation possibles sont alors les modes d'Eckersley [9]. Ceci ayant lieu, sous réserve des restrictions critiquées dans la première partie, quelles que soient les conditions aux limites.

Il en résulte, par assimilation, le principe suivant :

Lorsque, dans un corps solide ou dans le vide, le champ électrique reste constant, seuls les particules électrons peuvent circuler sous l'influence de ce champ. Aucune lacune ne peut être créée.

---

(8) $\mathcal{E}_0$ est, en effet, une constante universelle que l'on peut prendre pour unité d'énergie potentielle. On peut aussi écrire $M(z) = -2\mathrm{H}(z)$, si $\mathrm{H}(z)$ est exprimée en électrons-volts.

(9) Théoriquement, du moins, puisque les expériences récentes semblent précisément montrer que des modes de Gamow sont observés aux grandes distances.

2° ASSIMILATION DE L'ATMOSPHÈRE SUPERSTANDARD COMPORTANT UNE BARRIÈRE D'INDICE. — Ce cas est assimilé à celui d'un potentiel présentant une brusque discontinuité. La figure 5 montre deux exemples de « barrières de potentiel » :

Le premier est celui de la barrière de potentiel d'un contact semi-conducteur type n-métal polarisé dans le sens de conduction facile;

Le second est celui de la barrière de potentiel créée par l'anneau étroit de charge spatiale qui existe dans un magnétron à l'état bloqué (théorie Gutton-Ortusi) [10].

On reconnaît sur la figure 5, la courbe classique du profil d'indice avec couche d'inversion [11] de la figure 1.

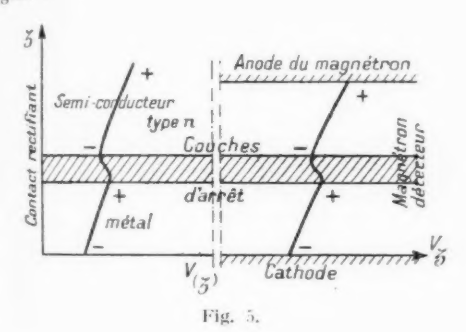


Fig. 5.

Il a été souligné que, outre les modes d'Eckersley, certains modes de Gamow étaient alors possibles pour de faibles valeurs de μ_n. Ces modes sont créés par passage dans la couche d'inversion et sont à peu près indépendants des conditions aux limites.

Il en résulte, par assimilation, le principe suivant :

Lorsque dans un corps solide ou dans le vide, le champ électrique subit une brusque variation, une partie des particules qui franchissent la barrière de potentiel est composée de lacunes. Ces lacunes sont complémentaires d'électrons de faible énergie cinétique. Elles sont créées dans la couche d'arrêt représentative de la barrière de potentiel.

Conclusion.

Nous avons essayé, dans cette deuxième partie, de dégager les trois idées suivantes :

1° *L'onde associée* à une particule doit correspondre au problème que l'on veut poser relatif à la particule.

Dans le cas de la recherche des trajectoires, l'onde associée correspond à la propagation dans un guide circulaire fictif dont le rayon de la section droite est voisin de λ_0, d'une onde de type E_0 transportant un signal de faible durée [12]. L'onde est très fortement atténuée à l'extérieur du cylindre. A l'intérieur de celui-ci, existe une quantité d'énergie constante et répartie uniformément, dont $\mathcal{E}_0$ représente la valeur dans la partie de guide intérieure à la phase de volume.

Lorsque l'énergie ne subit aucune modification, on peut dire que cette partie de guide représente un électron ou une lacune à l'état de repos.

La conception de l'électron au repos est donc très voisine de la conception d'absence de la particule.

Au contraire, lorsque l'énergie emmagasinée est modifiée dans le temps, la présence de la particule en mouvement se manifeste par le passage du signal. Lorsque ce dernier correspond, dans une tranche Δl du cylindre, à une augmentation de l'énergie constante emmagasinée dans cette tranche du guide, on dit qu'il traduit, dans cette tranche, le passage d'un électron.

Lorsque le signal correspond à une diminution de l'énergie emmagasinée, on dit qu'il traduit le passage d'une lacune.

La circulation de celle-ci est donc très analogue à la circulation d'un trou tourbillonnaire à la surface d'un fluide liquide homogène, alors que la circulation de l'électron est analogue à la circulation de la vague.

L'énergie totale $\mathcal{E}$ étant forcément positive, l'énergie cinétique d'une lacune est, en valeur absolue, inférieure à la valeur limite de l'énergie $\mathcal{E}_0$.

Par contre, rien ne limite l'énergie cinétique de l'électron qui peut être très supérieure à cette valeur.

La longueur totale Δ_z de la tranche de guide intéressée par la modification de l'énergie emmagasinée représente la dimension longitudinale de la particule.

a. Dans le problème de recherche de la trajectoire d'une particule de masse et d'énergie initiale données, Δv_z doit être rendu minimum afin de déterminer au mieux les variations d'énergie interne lors de la trajectoire et, par suite, les phénomènes de transition et le libre parcours moyen liés à la fonction $\psi(z)$.

[10] Cette théorie est exposée dans la thèse de M. Fechner. Voir *Annales de Radioélectricité*, n° 28, avril 1952.

[11] Rappelons que les courbes de profils d'indice sont tracées en portant en abscisse le module de réfraction modifié M (*fig.* 1). M est du même signe que V, à cause de la valeur négative de e.

[12] La fonction Φ et la courbe de la figure 4 représentent le développement en série de Fourier d'un signal d'amplitude constante (impulsion rectangulaire).

La longueur Δ_z est alors indéterminée et la particule ne peut être localisée dans le guide.

b. Dans le problème de la localisation de la particule sur sa trajectoire à un instant donné, en dehors des phénomènes de transition, c'est Δz qui doit être rendu minimum. Ce minimum est obtenu pour le maximum possible de Δv_z égal à v_z. On a alors

$$\Delta z_{(\min)} = \frac{h}{m v_z} = \lambda_z.$$

Il en résulte que, dans les meilleures conditions de localisation, un électron doit être représenté par un cylindre de révolution de rayon λ_0 et de hauteur λ_z.

Le cylindre est très allongé, puisque nous avons supposé

$$v_z \ll c \qquad \text{et} \qquad \lambda_z \gg \lambda_0.$$

Lorsque v_z est de l'ordre de c, λ_z est, au contraire, beaucoup plus petit que λ_0 et la relation précédente semble indiquer que Δz peut être inférieur à λ_0.

Toutefois, dans ce cas, la 1re relation d'incertitude doit être remplacée, en tenant compte de la variation de m avec v_z par la formule

$$\frac{m_0 \, \Delta z \, \Delta v_z}{\sqrt{1 - \frac{v_z^2}{c^2}}} \geq h.$$

La valeur maximum de Δv_z doit être prise alors égale à $c - v_z$.

Il est facile de voir que l'on a

$$\Delta z \geq \frac{h}{m_0 c} \sqrt{\frac{1 + \frac{v_z}{c}}{1 - \frac{v_z}{c}}}$$

Δz est donc encore supérieur à λ_0.

On voit donc que, lorsque l'énergie de l'électron augmente indéfiniment $\left(\lambda_z \to \lambda \text{ et } \frac{\lambda}{\lambda_0} \to 0\right)$, la localisation de la particule ne peut toutefois être effectuée que dans un domaine cubique dont le volume est supérieur à λ_0^3.

La dimension limite λ_0 $\left(\text{calculée à partir de la relation } \lambda_0 = \frac{hc}{\mathcal{E}_0}\right)$ est égale à $2{,}44 \cdot 10^{-10}$ cm.

Cette dimension est 1000 fois supérieure au rayon « classique » de l'électron [13] $a = \frac{2 e^2}{3 m}$ que l'on obtient en considérant l'énergie électrostatique emmagasinée à l'extérieur d'une sphère de rayon a, la densité de charge étant supposée *constante* à l'intérieur de la sphère.

On peut lever cette contradiction de la manière suivante :

L'onde ψ peut être définie de façon telle que son module $|\psi|^2$ représente l'énergie interne d'une grandeur thermodynamique possédant deux variables libres E et H. On peut alors montrer que, moyennant une hypothèse simple sur le courant énergétique, les grandeurs E et H satisfont à l'équation de propagation.

La densité de charge, définie comme la divergence de la variable E, est de la forme

$$\rho = \rho_0 \, e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \frac{\sin \frac{2\pi}{v_g}(z - z_0)\Delta\nu}{\frac{2\pi}{v_g}(z - z_0)\Delta\nu}.$$

La charge totale de l'électron est l'intégrale triple infinie de ρ. Sans développer ici le détail du calcul, on peut montrer que l'on obtient, par l'expression classique de l'énergie électrostatique emmagasinée, un rayon de l'ordre de λ_0.

Le même calcul fournit, pour la lacune, une charge égale et opposée à celle de l'électron et un rayon du même ordre de grandeur.

Par contre, l'application des relations d'incertitude aux protons et aux neutrons, de masse 1800 fois plus grande aboutit à leur donner une « dimension » de l'ordre de $1{,}7 \cdot 10^{-13}$ cm.

Il en résulte que les dimensions des électrons et des lacunes sont, dans tous les cas, bien supérieures aux dimensions des protons et des neutrons et, lorsque les électrons sont en présence de ces derniers, ils fonctionnent comme un véritable gaz dans lequel évoluent les particules matérielles dont on veut étudier les trajectoires.

Par contre, si ce sont les trajectoires des électrons que l'on veut étudier, les particules matérielles doivent être considérées comme des « billes » métalliques entre lesquelles se propagent des ondes dont les « dimensions » sont grandes devant le diamètre des billes.

L'espacement entre les billes est de l'ordre de grandeur de la dimension de l'onde associée Δz lorsque la vitesse de groupe est petite devant la vitesse de la lumière; il est également de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ_z de l'onde associée.

2° *Un problème de propagation troposphérique* peut être assimilé, au moyen de relations remar-

[13] On trouve un rayon du même ordre de grandeur que a en considérant la surface de « captation » d'une onde lumineuse.

quablement simples, à un problème de trajectoires de particules et de détermination de l'énergie de celles-ci (phénomènes des transitions) sous la réserve des conditions aux limites.

Il est directement relié à la particule *complémentaire* de la particule étudiée.

3° *Les notions de « barrières »* d'indice et de barrière de potentiel sont étroitement liées et correspondent aux mêmes phénomènes. En particulier, elles permettent de prévoir la création de lacunes dans les couches d'arrêt quelle que soit la nature de celle-ci et la forme de la barrière de potentiel. Le calcul direct ne permet de le montrer que dans quelques cas particuliers simples (cas du vibrateur linéaire où $\mathbf{H}(z)$ est une fonction linéaire et cas du rotateur de l'atome d'hydrogène où $\mathbf{H}(z)$ est une fonction quadratique).

4° *On peut montrer* ainsi que, contrairement à l'électron, la lacune possède un caractère « accidentel ». Elle ne peut se produire que lors d'une discontinuité dans la répartition de l'énergie potentielle causée par la présence d'un obstacle ([11]). Cet obstacle peut être, à une échelle presque macroscopique, la présence d'une couche d'arrêt formée par la réunion de deux corps de nature différente.

Il peut être réalisé dans le vide par la présence d'une charge spatiale de grande densité, par exemple, dans le cas du magnétron détecteur ou dans certains cas d'utilisation d'électrodes réflectrices.

Il peut être réalisé, à l'échelle microscopique, par la présence d'impuretés dans un semi-conducteur et les transitions qui s'effectuent dans la zone de valence de l'atome du corps étranger.

([11]) Tout en se distinguant toutefois d'une simple réflexion par l'obstacle occasionnant un changement de direction de l'électron.

Il est équivalent à la présence d'un élément de guide de diamètre inférieur au diamètre de coupure, intercalé dans une partie du guide de diamètre λ_0.

5° *Nous avons vu* que des lacunes sont créées directement dans les couches d'arrêt des contacts rectifints ou des fonctions rectifiantes polarisés dans le sens de conduction facile.

Ce phénomène est à la base du fonctionnement des transistors. Physiquement, ces derniers sont constitués par deux couches d'arrêt I_1 et I_2 séparées par une distance pq très petite :

La couche d'arrêt I_1 est polarisée dans le sens de conduction facile. Elle constitue l'« émetteur » des lacunes;

La couche d'arrêt I_2 est polarisée dans le sens de conduction difficile. Elle constitue le « collecteur » des lacunes;

Le semi-conducteur, type n, dans lequel circulent de p à q les lacunes est relié à la « base ».

Les lacunes, à l'intérieur du semi-conducteur type n, sont associées à des ondes évanescentes pseudo-périodiques (analogues aux fonctions de Block pour les ondes réelles). La propagation de ces ondes s'effectue difficilement, par suite de l'affaiblissement. Toutefois, dans la zone de Brillouin qui correspond aux longueurs d'onde voisines de la longueur d'onde de coupure, l'affaiblissement n'est pas prohibitif. La propagation des ondes évanescentes, par passage d'un signal d'énergie cinétique négative, peut donc encore justifier un transfert d'énergie entre deux contacts très rapprochés. On peut ainsi expliquer les propriétés des transistors par la circulation, vers le collecteur, de lacunes, créées par la tension alternative aux bornes du contact rectifiant de l'émetteur et qui sont en nombre très petit devant le nombre d'électrons libres, en état de saturation, circulant normalement vers la base du transistor.

ARTICLES PUBLIÉS, AU COURS DE L'ANNÉE 1952, PAR LES COLLABORATEURS DU GROUPE, EN DEHORS DES ANNALES DE RADIOÉLECTRICITÉ.

Étude par diffraction électronique de la déshydratation et décomposition des sels. Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 234, p. 93-95, séance du 19 décembre 1951, de Mme R. Lecuir et M. R. Lecuir.

En utilisant le vide qui règne dans l'appareil de diffraction électronique, la décomposition et la déshydratation des sels ont été étudiés dans l'appareil lui-même. Divers modes de décomposition sont observés, en particulier dans les conditions opératoires décrites, le départ de l'eau de coordination dans les exemples étudiés est lié à l'existence de diagrammes présentant des raies larges et floues caractéristiques.

Étude par diffraction électronique de la décomposition du chlorure de magnésium hydraté. Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 234, p. 832-835, séance du 18 février 1952, de Mme R. Lecuir et M. R. Lecuir.

La décomposition du chlorure de magnésium hydraté dans l'appareil de diffraction électronique conduit à un diagramme caractérisé par une raie large et floue précédant la formation du sel basique. Le diagramme de la magnésie se substitue ensuite progressivement à celui du chlorure basique à température plus élevée. L'action du faisceau d'électrons doit être limitée au temps de pose nécessaire à la prise du cliché.

Les condensateurs à diélectrique céramique, par A. Danzin (*Productions françaises*, mars 1952, p. 51-53).

Court résumé de deux pages sur quelques résultats des condensateurs subminiatures français et des condensateurs de puissance construits par la Société Le Condensateur Céramique.

Les équipements du faisceau hertzien Dijon-Strasbourg, par R. Rivère et M. Schwindenhammer (*Onde Électrique*, avril-mai 1952, p. 163-173).

Les auteurs décrivent les équipements du faisceau hertzien Dijon-Strasbourg étudiés pour transmettre 60 voies téléphoniques transposées dans la bande 60-300 kc/s. Ce faisceau hertzien comporte : une station terminale à Dijon (Mont Afrique), une station terminale à Strasbourg (Hôtel des Postes), une station relais à Besançon (Montfaucon), une station relais à Guebwiller (Grand Ballon). Les fréquences de transmission sont comprises entre 240 et 275 Mc/s. Les équipements radioélectriques utilisant le principe de la modulation de fréquence comportent essentiellement :

1° Dans les stations terminales : un pilote modulé en fréquence, suivi d'étages de multiplication de fréquence et d'un étage de puissance, et un récepteur du type superhétérodyne avec amplification en moyenne fréquence à 35 Mc/s environ.

2° Dans les stations relais et par sens de transmission : un récepteur identique aux récepteurs terminaux et un émetteur alimenté par le récepteur et chargé de retransmettre la haute fréquence après conversion du signal et amplification.

Les équipements du faisceau hertzien Paris-Lille, par H. Gutton, J. Fagot et J. Hugon (*Onde Électrique*, avril-mai 1952, p. 174-180).

L'exposé concerne les équipements destinés au faisceau hertzien Paris-Lille, prévu par l'Administration des P. T. T. Ce faisceau comprend quatre relais et deux terminaux. Étant donné les signaux à transmettre : trois fois 240 voies téléphoniques suivant la technique des courants porteurs (un ensemble de 240 voies pouvant être remplacé par un signal de télévision à haute définition), les solutions techniques adoptées sont exposées. On note, en particulier : la longueur d'onde de 8 cm, le système à modulation de fréquence avec une excursion de fréquence de ± 4 Mc/s, la puissance de 2 W, la surface des aériens 7 m². Compte-tenu des interférences possibles, un plan de fréquences a été établi dont les auteurs justifient les principes.

La description des divers éléments constitutifs des équipements est ensuite donnée. Les équipements des relais comprennent un mélangeur d'entrée, un amplificateur moyenne fréquence à 105 Mc/s, un mélangeur de sortie et un amplificateur hyperfréquence à deux tubes à ondes progressives. Les terminaux sont direc-

tement dérivés des relais. L'oscillateur de départ est un klystron modulé par son réflecteur. La démodulation s'effectue par un discriminateur à lignes. Des résultats sont donnés sur les aériens (cornets utilisant des lentilles frontales) et des indications sont fournies sur l'installation de l'ensemble dans les tours hertziennes.

Un nouveau type de lentilles en hyperfréquence, par J. C. Simon (*Onde Électrique*, avril-mai 1952, p. 181-189).

En empilant des plaques métalliques d'ouvertures circulaires dont les diamètres et les espacements sont de l'ordre de la longueur d'onde, il est possible de constituer des lentilles hertziennes, analogues à une lame d'épaisseur fixe et d'indice variable. Outre leur fonction de lentille, leur constitution permet des retouches pour la correction locale des déformations de surface de phase. Il en résulte une amélioration des projecteurs d'ondes décimétriques. En se perfectionnant, la technique des aériens U. H. F., de dimensions grandes par rapport à la longueur d'onde, se rapproche de l'Optique instrumentale classique. Les défauts essentiels de ces aériens procèdent, en effet, bien plus d'aberrations analogues à celles de l'Optique classique que de propriétés de diffraction.

Une méthode pratique pour la conception des antennes paraboliques en micro-ondes, par J. Deschamps et G. G. Esculier (*Onde Électrique*, avril-mai 1952, p. 209-213).

Le but de cet article est de présenter une méthode systématique de travail permettant aux ingénieurs d'effectuer avec le maximum d'efficacité, l'étude et la mise au point d'antennes de ce genre. Les auteurs ont donc laissé de côté, les considérations purement théoriques pour mettre l'accent sur l'utilisation combinée des calculs et des mesures expérimentales dans une succession d'étapes, qui conduisent au résultat final recherché : un aérien répondant aux spécifications et dont l'étude aura été effectuée dans les meilleures conditions possibles de prix et de délais.

Tubes électroniques de haute qualité (robustesse, fidélité, longue durée), par R. Suart (*Radio Française*, avril 1952, p. 5-10).

Il existe une certaine confusion dans l'esprit des usagers sur la correspondance entre les termes employés pour caractériser la haute qualité de certains tubes de réception fabriqués spécialement, et cette qualité elle-même; le présent article traite de ces problèmes. La haute qualité peut porter sur une grande robustesse, une très longue vie ou une faible dispersion des caractéristiques électriques, ces avantages pouvant, d'ailleurs, être trouvés partiellement ou en totalité sur différents types de tubes. Des indications sont données sur certaines particularités constructives de tubes de haute qualité et sur les essais spéciaux auxquels ils sont soumis.

Les techniques de scellement par poli optique, par J. Bleuze et P. Dussaussoy (*Le Vide*, n° 39, mai 1952, p. 1182-1190) et (*Verres et Réfractaires*, n° 6, novembre-décembre 1952, p. 347-355).

Après avoir indiqué les principes généraux du scellement par poli optique et les divers procédés employés pour sa réalisation, les auteurs montrent l'intérêt qu'il présente par rapport aux procédés classiques de scellement, dans son application à la fermeture des tubes électroniques. En particulier, il convient de signaler les trois avantages suivants :

1° Mise sous vide moléculaire de l'intérieur de l'enceinte pendant toute la phase thermique de fermeture;

2° Suppression des déformations mécaniques de l'enveloppe au cours de la fermeture;

3° Abaissement notable de la température de fermeture.

Divers exemples d'applications sont décrits.

Application de la méthode de diffraction des électrons à l'étude de la structure de l'argile et des produits céramiques en général, par R. Lecuir (*Congrès Céramique International*, Paris, mai 1952).

Description d'applications de la diffraction électronique résultant de la possibilité de déterminer la composition des couches superficielles et celle des cristallites de très petites dimensions aux matières premières céramiques; étude du rapport des dimensions des cristallites avec le retrait céramique; enrobage au cours du broyage; orientation des particules lamellaires dans les agglomérés; décomposition de la kaolinite, montrant la persistance des grandes lignes du réseau initial jusqu'à 980°; la formation d'$Al_2O_3\gamma$ résultant de la décomposition du réseau avant la formation de la mullite à 1100° paraît une interprétation du désordre du réseau; application de la diffraction électronique à la détermination du seuil de réaction à la surface de contact de deux solides; examen des surfaces de ruptures mécaniques et détermination de leur composant.

Un nouveau tube électronique pour les amplificateurs à large bande, par P. Meunier (*Onde Électrique*, juin 1952, p. 232-237).

Le développement croissant des liaisons téléphoniques à grand nombre de canaux soit par câbles coaxiaux, soit par faisceaux hertziens a imposé la mise au point de prototypes nouveaux de tubes électroniques. En particulier, dans le domaine des amplificateurs moyenne fréquence à large bande utilisant

des lampes classiques, un progrès s'imposait pour ces dernières. Après avoir développé la notion de facteur de mérite d'une lampe, l'auteur indique les principaux paramètres qu'il est possible de modifier pour en améliorer la valeur. La concrétisation de cette étude a nécessité le perfectionnement de la technologie classique de construction des tubes classiques pour aboutir à une réalisation industrielle. Deux prototypes de caractéristiques voisines sont présentés, ainsi qu'un exemple d'application sur un amplificateur à gain élevé.

Électricité industrielle... Électronique industrielle, par R. Larguier, (*Réalisations industrielles*, n° 6 : *Électricité*, 1952).

L'augmentation de la consommation industrielle d'énergie électrique est, en particulier, due à l'utilisation d'appareillages nouveaux électriques et électroniques. La part de ces derniers correspond à trois groupes principaux d'applications où l'on retrouve :

— énergie calorifique (soit 28 % de la consommation électrique industrielle française) : fours, soudeuses, postes haute fréquence;
— énergie thermique (14 %) : électrolyse;
— énergie cinétique (51 %) : commande électronique de moteurs.

L'intérêt principal de chaque technique nouvelle est mis en relief.

Sur les propriétés des lignes à structure périodique. Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 235, p. 32-34, séance du 7 juillet 1952 de MM. P. Guénard, O. Doehler et R. Warnecke.

Les auteurs précisent certaines propriétés physiques importantes des lignes à retard, du type dit à structure périodique utilisables dans les tubes à ondes progressives. Ils fournissent une représentation graphique simple de la dispersion qui permet d'obtenir facilement certaines grandeurs caractéristiques de la ligne (vitesse de groupe, vitesse de phase des harmoniques d'espace, par exemple) et met clairement en évidence la notion d'« ondes directes » et d'« ondes inverses ». Des références sont faites à des demandes de brevet prévoyant des moyens d'agir sur la forme de la caractéristique de dispersion par un choix convenable de la structure de la ligne.

Nouveaux tubes oscillateurs à large bande d'accord électronique pour hyperfréquences. Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 235, p. 236-238, séance du 21 juillet 1952, de MM. P. Guénard, O. Doehler, B. Epsztein et R. Warnecke.

Faisant suite à la précédente, cette Note décrit essentiellement le mécanisme de la production d'oscillations au moyen d'un nouveau tube à ondes progressives basé sur l'utilisation d'une onde inverse et auquel, on a donné le nom de « Carcinotron ». Dans ce système, il se produit une réaction tout le long de la structure, le faisceau cède à l'onde de l'énergie qui, en se propageant vers la source d'électrons, module à son tour le faisceau et l'énergie utile est prélevée du côté de l'entrée du faisceau (contrairement à ce qui se passe dans un tube amplificateur à ondes progressives ordinaire). L'avantage particulier du système, à savoir la possibilité d'obtenir des bandes d'accord électronique d'un ordre de grandeur nettement supérieur à celui des oscillateurs U. H. F. antérieurement connus, résulte de ce que la fréquence des oscillations engendrées, déterminée par la condition de quasi-égalité entre la vitesse des électrons et la vitesse de phase d'une onde inverse, varie suivant la courbe de dispersion de la ligne utilisée, laquelle peut être agencée, de manière à couvrir des bandes très larges. L'exposé mentionne l'existence de deux types de carcinotron : le type O caractérisé par le fait que le faisceau est envoyé dans un espace équipotentiel et le type M dans lequel les électrons sont injectés au sein de champs électrique et magnétique constants et croisés, analogues à ceux du magnétron oscillateur et du T. P. O. M.

Amplification par ondes de charge d'espace dans un faisceau électronique se déplaçant dans des champs électrique et magnétique croisés. Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 235, p. 470-472, séance du 18 août 1952, de MM. R. Warnecke, H. Huber, P. Guénard et O. Doehler [1].

Warnecke, Buneman, Mac Farlane entre autres, ont déjà mis, en évidence, la possibilité d'obtenir une amplification résultant des effets de charge d'espace au sein d'un faisceau se déplaçant dans des champs électrique et magnétique croisés et constants dans le temps. Dans la Note en question, les auteurs indiquent que cet effet (auquel ils ont donné le nom d'effet « Diocotron » pour rappeler qu'il est dû à la « poursuite » des électrons) permet d'expliquer un certain nombre d'anomalies importantes observées dans le comportement des tubes à champs croisés; ils rendent compte brièvement de certaines expériences faites à ce sujet et dont les résultats correspondent à ceux de la théorie. Ils montrent, en particulier, que la forme de la caractéristique du courant « sole » (électrode négative définissant avec la ligne à retard l'espace d'interaction d'un magnétron amplificateur) est explicable à partir de l'effet diocotron. Par ailleurs, ils indiquent avoir obtenu, au cours d'expé-

[1] Les problèmes en question feront l'objet d'un exposé détaillé dans un prochain numéro des *Annales*.

riences préliminaires effectuées avec un diocotron amplificateur : une puissance de 20 W, un gain de 15 dB et un rendement de 5 % aux environs de 1200 Mc/s.

Oscillations d'un magnétron sans fente liées à l'amplification par ondes de charge d'espace. Note au *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 235, p. 493-494, séance du 25 août 1952, de MM. R. Warnecke, H. Huber, P. Guénard et O. Doehler [1].

L'existence d'ondes de charge d'espace amplifiées dans un faisceau électronique se déplaçant au sein de champs électrique et magnétique croisés suggère la production d'oscillations lorsque le faisceau électronique se ferme sur lui-même comme c'est le cas dans un magnétron usuel et indépendamment de l'existence d'un circuit oscillant quelconque connecté aux électrodes ou à celles d'une résistance négative. En se basant sur l'effet diocotron, on doit donc théoriquement obtenir des oscillations sur des fréquences telles que la durée d'une révolution d'un électron autour de la cathode d'un magnétron-diode soit un multiple entier de la période d'oscillation. Les auteurs rendent compte d'expériences dont les résultats sont en accord satisfaisant avec cette théorie; ils indiquent avoir obtenu une puissance d'environ 50 mW sur une bande de fréquences couvrant plus d'un octave autour de 800 Mc/s.

Steuerung von Elektronenströmen durch fortschreitende elektromagnetische Wellen (Lauffeldröhren) (Modulation de faisceaux électroniques par ondes progressives, tubes à ondes progressives), W. Kleen, L. Bruck, O. Doehler et H. Huber (*Fortschritte der Hochfrequenztechnik*, vol. 3, 1952, p. 226-364).

Cet article fait la mise au point des connaissances acquises en 1949 sur l'amplification par interaction entre un faisceau électronique et une onde progressive. Après quelques considérations théoriques générales sur ce mécanisme d'interaction, la partie la plus importante de l'exposé est consacrée aux tubes du type Kompfner-Pierce et s'appuie essentiellement sur les résultats obtenus par les auteurs et leurs collègues dans les laboratoires de la Compagnie générale de T. S. F. Les auteurs esquissent ensuite la théorie des tubes à ondes de charge d'espace électronique et des oscillographes à ondes progressives et terminent par un bref examen des propriétés des divers types de ligne à retard.

Les thermistances et leur rôle dans les circuits de mesure, par Thien-Chi et J. Suchet (*Mesures et Contrôle Industriel*, n° 184, septembre 1952, p. 519-524 et n° 185, octobre 1952, p. 573-576).

La résistance des semi-conducteurs électroniques frittés est telle que son logarithme croît linéairement avec $\frac{1}{T}$ (T, température K), le coefficient de variation étant en valeur absolue environ 10 fois plus élevé que pour les métaux. L'auto-échauffement de la thermistance lui confère, sauf pour les courants très faibles, une caractéristique statique tension-courant présentant une résistance différentielle négative et dépendant de son coefficient de dissipation thermique, fonction du milieu ambiant. Les thermistances C. S. F. à caractéristiques stabilisées, se présentent sous trois formes produites industriellement : ambiance ($\theta_{max} \sim 100°$ C), normale ($\theta_{max} \sim 250°$ C) et réfractaire ($\theta_{max} \sim 1200°$ C), auxquelles il faut ajouter des types miniatures, à très faible constante de temps. Outre la thermométrie et la thermo-régulation, leurs applications sont multiples : compensation du coefficient positif du cadre des appareils de mesure par une thermistance en série. Indicateurs de tension en pont à facteur de mérite élevé. Dispositifs de temporisation avec relais, permettant d'appliquer la haute tension aux tubes électroniques, une fois le filament chaud. Mesures des puissances U. H. F. à l'aide d'éléments miniatures insérés dans un pont. Mesure des pressions gazeuses, basée sur la dissipation thermique du milieu, etc.

Contrôle de l'action chimique du faisceau pendant la prise des clichés de diffraction électronique. Cas du chlorure de cobalt hydraté. Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 235, p. 946-948, séance du 20 octobre 1952, de Mme R. Lecuir et M. R. Lecuir.

La destruction de l'échantillon pendant la prise du cliché nous a conduits à mesurer directement l'absorption d'énergie du faisceau. Lorsque cette absorption est négligeable, les conditions opératoires sont suffisantes pour permettre de suivre les détails de la décomposition de l'échantillon aux températures croissantes et d'éviter une modification de la structure du composé due au faisceau pendant la prise du cliché. Application au chlorure de cobalt.

Sur le rayonnement longitudinal d'antennes diélectriques. Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 235, p. 1379-1381, séance du 24 novembre 1952 de MM. J.-C. Simon et G. Weill.

Le calcul du champ à l'infini de certaines antennes rayonnant en bout est relié à la variation de vitesse de phase du champ tout le long de l'antenne. Cette Note montre qu'à partir de ce fait, on peut trouver le diagramme de l'énergie rayonnée à l'infini, ainsi que l'énergie totale rayonnée. Des vérifications expérimentales ont été effectuées.

Sur la détermination des vibrations propres et les changements de mode d'un magnétron oscillateur à cavités multiples. Note aux *Comptes rendus de*

l'Académie des Sciences, t. 235, p. 1494-1496, séance du 1er décembre 1952 de MM. A. LEBLOND, J. NALOT et O. DOEHLER.

En « ouvrant » l'anode d'un magnétron à cavités multiples, il est possible de tracer la courbe de dispersion de la ligne à retard ainsi obtenue; les résonances du magnétron étant figurées par des points situés sur cette courbe de dispersion. Ce procédé permet une étude commode de nouveaux types de circuits; la forme de la courbe de dispersion devant être ajustée, par une modification des paramètres de la structure étudiée, de façon à éviter les changements de mode.

Les applications des variateurs-régulateurs de vitesse électroniques, par R. LARGUIER (*Électricité*, décembre 1952, p. 237). [*Suite* et *fin* d'un ensemble de trois articles : *Circuits pour variateurs-régulateurs de vitesse électroniques* (*Électricité*, décembre 1950); *Performances des variateurs-régulateurs de vitesse électroniques* (*Électricité*, octobre 1951).]

De nombreux exemples le plus souvent chiffrés sont analysés sous les rubriques : Problèmes de « défilé » (machines-outils, métallurgie, haute-fréquence, textile, papeteries), Problèmes d'enroulement (un problème précis est exposé plus complètement); Asservissements et régulation divers et, en particulier reproducteurs pour machines-outils.

Propriétés caractéristiques des matériaux céramiques obtenus par frittage. Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 235, p. 1650-1652, séance du 22 décembre 1952, de M. R. LECUIR.

Les variations de densité apparente dans l'échantillon cru, modifient l'orientation de l'échantillon et entraînent des variations locales de retrait, origine de la plupart des défauts de fabrication. L'expérience démontre le caractère local et souvent incomplet des réactions dans le matériau céramique.

Les régulations des fours industriels par thermistances réfractaires, par N. THIEN-CHI et J. SUCHET (*Ingénieurs et Techniciens*, n° 50, décembre 1952.

La mise au point de la fabrication des thermistances réfractaires a permis d'obtenir des éléments à caractéristiques stables à haute température, pouvant fournir une puissance de l'ordre du watt. La rapidité de variation de ces résistances avec la température a nécessité de diviser l'intervalle 200-1200° C en trois gammes couvertes avec trois matériaux différents. On réalise ainsi des régulateurs de fours avec deux relais en cascade, alimentés par courant continu, le courant alternatif pouvant, toutefois, s'avérer préférable aux températures élevées, pour s'affranchir des forces électromotrices parasites. Ces régulateurs, robustes, peuvent servir presque indéfiniment, sans aucun entretien, en stabilisant une température à quelques degrés près aux environs de 1000° C.

Les céramiques dans les techniques du laboratoire, par R. LECUIR [*Techniques générales du Laboratoire de Physique* (*C. N. R. S.*), publiées sous la direction de J. SURUGUE, vol. III, p. 349-387].

Le but de cet article est de donner, sous une forme condensée : d'une part, une description des procédés caractéristiques de l'industrie céramique (plasticité et mise en forme de l'objet) pour permettre à l'utilisateur de comprendre le choix de la technique qu'il convient d'adopter pour résoudre un problème donné et les diverses conséquences de ce choix en particulier sur la précision des cotes obtenues; d'autre part, un résumé de la composition et des propriétés des divers produits céramiques : produits siliceux, isolants thermiques, briques silicoalumineuses, produits courants types porcelaine, produits pour l'électrotechnique, réfractaires spéciaux, compositions étanches résistant au choc thermique, métallisation, soudure verre et métal céramique, céramique-métal. Un tableau résume les formes géométriques des échantillons destinés à la détermination des essais physiques des compositions céramiques.

Le Verre dans les techniques du laboratoire, par A. DANZIN [*Techniques générales du Laboratoire de Physique* (*C. N. R. S.*), publiées sous la Direction de J. SURUGUE, vol. III, p. 391-436].

L'ensemble des problèmes concernant les propriétés physiques du verre et leurs compositions chimiques sont exposés dans une première partie. On trouve, en particulier, des tableaux très complets sur les teneurs en différents oxydes correspondant aux compositions chimiques des différents types de verre. Dans une seconde partie, les procédés de verrerie utilisés dans les laboratoires et dans les constructions des tubes de T. S. F. sont exposés.

IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55
143226 PARIS 6e.

Dépôt légal, imprimeur, 1953, n° 858.

pi-
pé-
° C
ffé-
vec
nu,
pré-
chir
urs,
ans
e à

par
e de
tion

rme
édés
é et
lisa-
qu'il
nné
ulier
part,
des
ants
cou-
ctro-
ches
dure
leau
des-
des

par
re de
ction

riétés
iques
ouve,
r les
mpo-
Dans
tilisés
s des

RS
, 55
6e.

858.

SOMMAIRE

Imp. GAUTHIER - VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, PARIS
143 226

Le Gérant : L. P. BOULANGER.

